245 — Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.

I Holomorphie

On considère $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert.

1- Notion de fonction holomorphe

Def 1 : $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite $\mathbb{C}$-dérivable en un point $a \in \Omega$ si la limite

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe dans $\mathbb{C}$. Si f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de Ω, f' est appelée dérivée de f. f est holomorphe sur Ω si f est $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω. On note $H(\Omega)$ l'ensemble des f holo sur Ω.

Ex 2 :
- $z \mapsto z$ est $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathbb{C}$
- $z \mapsto \bar{z}$ n'est $\mathbb{C}$-dérivable en aucun point de $\mathbb{C}$.

Prop 3 : La somme, le produit de deux fonctions $\mathbb{C}$-dérivables est $\mathbb{C}$-dérivable et l'inverse d'une fonction $\mathbb{C}$-dérivable qui ne s'annule pas est $\mathbb{C}$-dérivable. La composée de fonctions $\mathbb{C}$-dérivables est $\mathbb{C}$-dérivable.

Ex 4 : Toute fonction polynomiale est $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathbb{C}$, ie si $P : z \in \mathbb{C} \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$, P est $\mathbb{C}$-dérivable en tout x de $\mathbb{C}$ et $P'(z) = \sum_{i=1}^{n} i a_i z^{i-1}$.

Prop 5 : Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Sont équivalents :
1. f est $\mathbb{C}$-dérivable en $a \in \Omega$.
2. f est différentiable en a et $Df(a)$ est une similitude directe.
3. f est différentiable en a et $Df(a) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-linéaire.

Si ces propriétés sont vérifiées, $Df(a)$ est la multiplication par $f'(a)$.

Cor 6 : Une application $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω ssi f est différentiable et vérifie les équations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \; ; \; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

2- Fonctions holomorphes usuelles

Prop 7 : Toute fonction f, ... $\mathbb{C}$ ... la somme de la série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$, est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable dans $D(0,R)$ et ses dérivées s'obtiennent en dérivant terme à terme.

Déf 8 : Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$. On pose $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ l'exponentielle de z.

Prop 9 : La fonction exponentielle est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et $(e^z)' = e^z$.

Prop 10 : $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ où la série converge normalement sur les compacts de $\mathbb{C}$.

Def/Prop 11 : Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \; ; \; \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

sin et cos sont holomorphes sur $\mathbb{C}$. sin s'annule en les multiples de π et cos s'annule en les impairs de $\pi/2$.

Def/Prop 12 : Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus (2\mathbb{Z}+1)\frac{\pi}{2}$, on pose $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$. tan est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus (2\mathbb{Z}+1)\frac{\pi}{2}$.

Def 13 : Si $z \in \mathbb{C}^*$, on dit qu'un nombre complexe w est un logarithme de z si $e^w = z$ et qu'un nombre θ est un argument de z si $z = |z| e^{i\theta}$.

Def 14 : On définit les déterminations principales du logarithme et de l'argument, Log et Arg, sur $\mathbb{C}^*$, de la façon suivante : $\mathrm{Arg}(z)$ est l'unique argument de $z \in \mathbb{C}^*$ dans $]-\pi, \pi]$ et $\mathrm{Log}(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)$

Rq 15 : $\mathrm{Log}(ab) = \mathrm{Log}(a) + \mathrm{Log}(b)$ n'est pas valables sur $\mathbb{C}^*$ mais seulement modulo $2i\pi$. Cette relation est vraie si $|\mathrm{Arg}(a)|, |\mathrm{Arg}(b)| < \pi/2$.

Lem 16 : Il n'existe pas de détermination continue du logarithme sur S^1.

Prop 17 : Arg est de classe C^∞ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ et Log est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ avec $\mathrm{Log}'(z) = 1/z$ pour tout z de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.

3. Formule de Cauchy

Thm 18 (Formule de Cauchy) : Soit $f \in H(\Omega)$. Pour tout disque $\mathbb{D} \subset \Omega$ et tout point $z \in \mathring{\mathbb{D}}$, on a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta .$$

Ex 19 : Si $\mathbb{D} \subset \Omega$ est un disque et $a \in \mathring{\mathbb{D}}$, alors

$$\int_{\partial \mathbb{D}} \frac{dz}{z-a} = 2i\pi .$$

Cor 20 : Toute fonction holomorphe est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable. En particulier, la dérivée d'une fonction holomorphe est une fonction holomorphe.

Cor 21 : Si $f \in H(\Omega)$ et si $\mathbb{D} \subset \Omega$, pour tout entier $n \geq 0$ et tout point $z \in \mathring{\mathbb{D}}$, on a

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \, d\zeta .$$

Cor 22 (Formule de la moyenne) : Si f est holomorphe au voisinage d'un disque $\mathbb{D}(z_0, r)$, alors pour tout entier $n \geq 0$,

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) \, e^{-in\theta} \, \frac{d\theta}{2\pi}$$

II Applications de la formule de Cauchy

1. Inégalités de Cauchy

Thm 23 : Si f est une fonction holomorphe dans un disque $\mathbb{D}(z_0, R)$, alors pour tout $n \geq 0$ et $r \in]0, R[$,

$$\left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right| \leq \frac{M(r)}{r^n} \quad \text{avec } M(r) = \sup_{|z - z_0| = r} |f(z)| .$$

Cor 24 (Liouville) : Toute fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ bornée est constante.

Thm 25 (d'Alembert-Gauss) : Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine complexe.

2. Analyticité complexe

Thm 26 : Si f est une fonction holomorphe dans un disque ouvert $D = \Delta(z_0, R)$, on peut écrire pour tout $z \in D$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$, où la série converge normalement sur les compacts de D.

Cor 27 : Si $f \in H(\Omega)$, f est développable en série entière dans tout disque contenu dans Ω. En particulier, f est développable en série entière au voisinage de chaque point de Ω.

Thm 28 : Supposons Ω connexe et $f \in H(\Omega)$ non identiquement nulle. A chaque $a \in Z(f)$ correspond un unique entier m positif et une unique fonction $g \in H(\Omega)$ tels que $f(z) = (z-a)^m g(z)$ sur Ω et $g(a) \neq 0$. m est l'ordre (ou la multiplicité) du zéro a.

Cor 29 : Si f est holomorphe sur un ouvert connexe, les zéros de f sont isolés. C'est le principe des zéros isolés.

Cor 30 (Principe prolongement analytique) : On suppose Ω connexe. Si $f, g \in H(\Omega)$ coïncident sur un ouvert non vide de Ω ou sur une partie contenant un pt d'accumulation, alors $f = g$ sur Ω.

Ex 31 : Soit $A^2(\mathbb{D}) = \{ f \in H(\mathbb{D}) : \int_{\mathbb{D}} |f^2(z)|\,dx\,dy < \infty \}$.
Alors $(A^2(\mathbb{D}), \|\cdot\|_{L^2})$ est un espace de Hilbert et (e_n) avec $e_n : z \in \mathbb{D} \mapsto \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\, z^n$ en est une base hilbertienne.
$\boxed{\text{DEV 1}}$

3. Extrema des fonctions holomorphes

Prop 32 : Si Ω est connexe, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe et si $|f|$ admet un maximum local en un pt de Ω, alors f est constante.

Prop 33 : Si Ω est connexe, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe et si $|f|$ admet un minimum local dans Ω, ce minimum est nul.

Prop 34 : Si Ω est connexe, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe non constante, f est ouverte.

Thm 35 (Principe du maximum) : On suppose Ω borné. Soit $f \in H(\Omega)$, $f \in C^0(\bar{\Omega})$.
1. $\forall z \in \Omega$: $u(z) \leq \sup\{u(\zeta) : \zeta \in \partial\Omega\}$.
2. Si Ω est en plus connexe et u non constante, $u(z) < \sup\{u(\zeta) : \zeta \in \partial\Omega\}$ pour tout $z \in \Omega$.

Cor 36 : On suppose Ω borné. Si $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{C}$ est continue sur $\bar{\Omega}$, holomorphe sur Ω, $|f(z)| \leq \sup\{|f(\zeta)| : \zeta \in \partial\Omega\}$.

4. Intégrales à paramètre

Thm 37 : Soit $(T, \mathcal{T}, \mu)$ espace mesuré, $F : \Omega \times T \to \mathbb{C}$. On suppose :
1. Pour tout $z \in \Omega$, $t \mapsto F(z,t)$ est mesurable.
2. Pour tout $t \in T$, $z \mapsto F(z,t) \in H(\Omega)$.
3. Pour tout $K \subset\subset \Omega$, il existe $u_K \in L^1(T,\mu)$ telle que $|F(z,t)| \leq u_K(t)$ pour tout $(z,t) \in K \times T$.

Alors $f : z \mapsto \int_T F(z,t)\,\mu(dt) \in H(\Omega)$ et ses dérivées s'obtiennent en dérivant sous le signe intégral.

Ex 38 : $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\,dt$ définit une fonction holomorphe sur $\{Re(z) > 0\}$. $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ pour tout $Re(z) > 0$.

III Singularités

1. Singularités isolées

Def 39 : Si $f \in H(\Omega)$, un pt $a \in \mathbb{C}$ est une singularité isolée pour f si a est un pt isolé de $\partial\Omega$. a est une singularité éliminable pour f si f peut se prolonger en une fonction holomorphe sur $\Omega \cup \{a\}$.

Thm 40 (Casorati-Weierstrass) : Soit $a \in \Omega$, $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. On note $\sum c_n (z-a)^n$ la série de Laurent de f au pt a. Trois cas peuvent se présenter :
1. a est éliminable pour f.
2. $\lim_{z \to a} |f(z)| = +\infty$. Ceci a lieu ssi il existe $m \geq 1$ tel que $c_{-m} \neq 0$ et $c_n = 0$ pour $n < -m$. On dit que a est un pôle de multiplicité m pour f.
3. L'image de tout voisinage épointé de a par f est dense dans $\mathbb{C}$. a est une singularité essentielle pour f.

2. Théorème des résidus

Def 41 : Soient $a \in \mathbb{C}$, f holomorphe dans une couronne centrée en a. $Res(f,a)$ est le coefficient de $\frac{1}{z-a}$ dans le développement en série de Laurent de f en a.

Thm 42 (des résidus) : Soit $f \in H(\Omega \setminus S)$ où $S \subset \Omega$ sans pt d'accumulation dans Ω. Soit D un ~~disque~~ compact à bord régulier de Ω tel que $\partial D \cap S = \emptyset$. Alors S a un nombre fini de pts dans D et $\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} f(z)\,dz = \sum_{a \in S \cap D} Res(f,a)$.

Ex 43 : $\forall \alpha \in (0,1)$, $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)t^\alpha} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$; $\forall\, 0 < Re(z) < 1$, $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$
Formule des compléments
$\boxed{\text{DEV 2}}$

Amar Matheron : Analyse Complexe

Cassini

H. Cartan