f: Tauvel.
Analyse complexe

Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications

245

Cadre: U un ouvert de $\mathbb{C}$. $f: U \longrightarrow \mathbb{C}$ une application

def 0: $f: U \longrightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in U$. On dit que f est holomorphe en z_0 si la fonction $U\setminus\{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ a une limite quand $z \to z_0$

- que l'on note $f'(z_0)$ = dérivée de f en z_0.

f est dite holomorphe sur U si f holomorphe en tout points de U.
on note $\mathcal{H}(U) = \{$fct holomorphe sur $U\}$.

I) Premiers exemples de fonctions holomorphes: Séries entières et de Laurent.

1) Séries Entières

def 1: On appelle série entière de la variable complexe, toute série de fonctions $\sum f_n$ avec $f_n: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto a_n z^n$ où $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $z_0 \in \mathbb{C}$.

prop 2: Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une S.E. Alors il existe un nombre $R \in [0,+\infty]$, appelé rayon de convergence (RCV) tq la série converge uniformément et absolument dans $\overline{D(0,r)}$ pour tout $r<R$, et diverge pour tout $z \notin \overline{D(0,R)}$

prop 3 (formule d'Hadamard): R est donné par $\frac{1}{R} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Coro 4: On appelle S.E dérivée de $\sum a_n z^n$ la série $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$
Alors une S.E et sa S.E dérivée on même RCV.

Thm 5: la fonction somme S de $\sum a_n z^n$ est holomorphe sur $D(0,R)$ et pour $z_0 \in D(0,R)$, $S'(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z_0^n$

prop 6:
Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des S.E de RCV R_1 et R_2
Alors les S.E somme et produit $\sum c_n z^n$ et $\sum d_n z^n$ convergent, ont pour RCV $\tilde{R_1}$, $\tilde{R_2}$ tq $\tilde{R_i} \geq \min(R_1,R_2)$.
et $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ $\quad c_n = a_n + b_n$. $\forall n$.
$\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right)$ $\quad d_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ $\forall n$

ex 7 (exponentielle).
- On définit l'exponentielle par $e^z = \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$
- exp est donc holomorphe sur $\mathbb{C}$ et $\exp'(z) = \exp(z)$. et même $\exp^{(n)}(z) = e^z$
- $\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$, $e^z \neq 0$, $(e^z)^{-1} = e^{-z}$, $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$, $|e^z| = 1 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$.
- $\exp: (\mathbb{C},+) \longrightarrow (\mathbb{C}^*,\times)$ est un homéomorphisme de groupe continu, surjectif non injectif ($\ker(\exp) = 2i\pi\mathbb{Z}$).
- exp est périodique. ses périodes sont les $2ik\pi$ $k \in \mathbb{Z}$.

2) Fonctions analytiques

Not°: $\mathcal{A}(U) = \{$fct analytique sur l'ouvert $U\}$.

Def 8: On dit qu'une fonction définit sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ est analytique dans U si elle est développable en série entière en tout point de U.

ex 9: $z \longmapsto \frac{1}{z}$ est analytique sur $\mathbb{C}^*$, car si $a \in \mathbb{C}^*$ et $|z-a|<|a|$ on a: $\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{a^{n+1}}$.

prop 10: $\mathcal{A}(U)$ est une $\mathbb{C}$ algèbre contenant la C algèbre des fonctions polynômes.
- $\mathcal{A}(U) \subset \mathcal{H}(U)$.

Thm 11: Si une S.E $\sum a_n z^n$ a un RCV $R>0$, sa somme $f \in \mathcal{A}(D(0,R))$

Thm 12 (Principe du prolongement analytique (PPA)). Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $a \in U$, et $f \in \mathcal{A}(U)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes
(i) $f \equiv 0$ sur U
(ii) $f \equiv 0$ dans un voisinage de a.
(iii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(a) = 0$.

Coro 13: Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, et $f, g \in \mathcal{A}(U)$.
Si f et g coïncident au voisinage d'un point de U alors $f = g$.

Coro 14: (Principe des zéros isolés). Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{A}(U)$ non identiquement nulle. l'ensemble $Z(f)$ des zéros de f est une partie localement finie de U.

3) Autre exemple similaire. Séries de Laurent

def 15: On appelle série de Laurent les séries $\sum f_n$ où $f_n: z \longmapsto \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$

prop 16: Si R est le RCV de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, alors la somme de la série de Laurent est définit et holomorphe sur $C(0,r,R) = \{z \in \mathbb{C},\ r < |z| < R\}$ (...)

où r ... $\sum a_{-n} z^n$ ...

ex: fonction développable en séries de Laurent; (D.S.L))

$D = D(0,1)$, $C_1 = C(0,1,2)$, $C_2 = \{z \in \mathbb{C},\ |z| > 2\}$.
Alors $f(z) := \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{2-z}$ est D.S.L sur D, C_1 et C_2.

Alors $f \in \mathcal{H}(D(0,2) \setminus \{-1\})$

II) Fonctions Holomorphes, propriétés et applications fondamentales.

1) Equations de Cauchy-Riemann

prop18: Pour $f : U \to \mathbb{C}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :
(1) f holomorphe en $a \in U$
(2) f est différentiable en a et $df(a)$ est une similitude directe.
(3) f est différentiable en a et $df(a)$ est la multiplication par $f'(a)$.

Coro 19: Si $f : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe sur U, alors $df = f'dz$

Coro20: $f : U \to \mathbb{C}$ est holomorphe sur U si et seulement si f est différentiable et vérifie les conditions de Cauchy-Riemann :
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (C\text{-}R)$$
où $f(\underset{x+iy}{z}) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ où $u = Re(f)$, $v = Im(f)$.

Rq 21: $(CR) \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x}$

Si $f \in \mathcal{H}(U)$, $f' = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}$

prop22: Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$. Si $f' \equiv 0$ sur U Alors f est constante.

prop23: Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$. les conditions suivantes sont équivalentes : (1) f est constante sur U, (2) $Re(f) =$ cste sur U, (3) $Im(f) =$ cste sur U. (4) $|f|$ est cste sur U, (5) $\bar{f} \in \mathcal{H}(U)$.

c-ex24: Par (C-R), on a $z \mapsto |z|^2 \notin \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

ex25: Soit $U = \{z \in \mathbb{C} \,/\, Re(z) > 0\}$. Si $z = x+iy \in U$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, on pose $f(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{Arctan}(\frac{y}{x})$
Alors f vérifie (C-R) et donc $f \in \mathcal{H}(U)$.

2) Déterminations continues du Logarithme.

def26: Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^*$. On appelle détermination continue de l'argument sur U toute application continue $\theta : U \to \mathbb{R}$ tq pour tout $z \in U$, $\theta(z)$ soit un argument de z.

Rq 27: Si U est de plus connexe. Si θ_1, θ_2 sont 2 déterminations continues de l'argument, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tq $\theta_1(z) - \theta_2(z) = 2k\pi$ pour tout $z \in U$

def28: On note $\Omega_0 = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. On appelle détermination principale de l'argument sur Ω_0 et on note $\mathrm{Arg}\, z$ pour $z \in \Omega_0$ l'unique argument de z dans $]-\pi, \pi[$. c'est une détermination continue.

def29: Une détermination continue du logarithme sur U ouvert de $\mathbb{C}^*$ est une application continue $\ell : U \to \mathbb{C}$ tq $e^{\ell(z)} = z$ pour tout $z \in U$.

prop30: Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^*$, les déterminations du logarithme sur U sont les fonctions sur U de la forme $z \mapsto \ln|z| + i\theta(z)$, où θ dét C^0 de l'arg. sur U.

def31: $f : U \to \mathbb{C}$, on appelle primitive de f sur U, toute fonction $F \in \mathcal{H}(U)$ tq $F' = f$.

Thm 32: Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^*$.
(i) Toute détermination du logarithme sur U est une primitive de $\frac{1}{z}$ sur U.
(ii) Si $\frac{1}{z}$ admet une primitive sur U, il existe des déterminations du log sur U.

prop33: Si $|z| < 1$, on a : $\mathrm{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$.

3) Formules de Cauchy et conséquences.

Rq34: U ouvert de $\mathbb{C}$. On a déjà vu $\mathcal{A}(U) \subset \mathcal{H}(U)$. On verra que $\mathcal{A}(U) = \mathcal{H}(U)$.

Thm 35: (Thm de Cauchy pour un convexe). Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $w \in U$, et $f : U \to \mathbb{C}$ continue et holomorphe dans $U \setminus \{w\}$.
Alors f possède une primitive dans U et, pour tout chemin fermé γ dans U on a :
$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

Thm36: (Formule de Cauchy pour un convexe.) Soit γ un chemin fermé dans un ouvert convexe U de $\mathbb{C}$, $z \in U \setminus \mathrm{im}\gamma$, et $f \in \mathcal{H}(U)$.
Alors $f(z)\,\mathrm{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi$. où $\underset{\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z}}{\mathrm{ind}_\gamma(z)}$ est l'indice de z p/r à γ.

coro37: U ouvert de $\mathbb{C}$, on a $\mathcal{H}(U) \subset \mathcal{A}(U)$ $\to$ Thm12

csq:38 les fonctions holomorphe sur U vérifient donc le PPA et ses conséquences

coro 39: Si U est ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $a \in U$, $f \in \mathcal{H}(U)$, γ chemin fermé $a \notin \mathrm{im}\gamma$, alors : $f^{(n)}(a)\,\mathrm{ind}_\gamma(a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}}\,d\xi$

Rq 40: $f \in \mathcal{H}(U) \Rightarrow f$ indéfiniment dérivable.

Thm 41 (Inégalités de Cauchy)
Soit $R\in\mathbb{R}_+^*$, $f\in\mathcal{H}(D(0,R))$. Si $z\in D(0,R)$, on a $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.
Si $r\in]0,R[$, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|a_n|=\frac{1}{n!}|f^{(n)}(0)| \le \frac{\sup\{|f(z)|;|z|=r\}}{r^n}$

Coro 42: (Thm de Liouville).
Toute fonction entière (elts de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$) et bornée est constante.

Appli 43: (Thm de d'Alembert) Tout polynôme d'une variable à coefficients complexes et non constant a au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

4) Fonctions holomorphes définies par une intégrale.

Thm 44: Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f:\Omega\times X\to\mathbb{C}$.
Supposons que : (i) pour tout $z\in\Omega$, $x\mapsto f(z,x)$ est mesurable
(ii) $\exists N\subset X$ tq $\mu(N)=0$ et tq pour tout $x\notin N$, $z\mapsto f(z,x)\in\mathcal{H}(\Omega)$;
(iii) $\forall K\subset\subset\Omega$, $\exists g\in L^1$ positive, indépendante de z, telle que : $|f(z,x)|\le g(x)$, $\forall z\in K$, $\forall x\notin N$.
Alors la fonction $F(z):=\int f(z,x)\,d\mu(x)$ est holomorphe dans Ω et $F'(z)=\int \frac{\partial f}{\partial z}(z,x)\,d\mu(x)$.

inclus ds dvpt 2.
Appli 45 la fonction $\Gamma:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ se prolonge en une fonction holomorphe dans l'ouvert $\Omega=\{z\in\mathbb{C},\ \mathrm{Re}\, z>0\}$.

Rq 46: Peut-on prolonger davantage la fonction Γ ?

⚠ III) →
III) Fonctions méromorphes

1) Singularités et fonctions méromorphes.

Thm 47: Soient $a\in\mathbb{C}$, $r,R\in[0,+\infty]$, et $f\in\mathcal{H}(C(a,r,R))$. Il existe alors une unique suite $(a_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ tq la série de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ CV dans $C(0,r,R)$ et vérifiant, pour tout $z\in C(a,r,R)$, $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$. → D.S.L de f ds $C(a,r,R)$

ex 48 cf ex 18

déf 49: Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $a\in U$, $f\in\mathcal{H}(U\setminus\{a\})$. On dit que f a une singularité isolée en a.
la singularité isolée est de 2 types :
- illusoire si le D.S.L de f est $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$
- pôle (d'ordre m) si le DSL de f est $\sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-a)^n$ avec $a_{-m}\neq 0$, $m>0$

déf 50: Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. $f: U\to\mathbb{C}$ est dite méromorphe dans U s'il existe une partie localement finie A de U tq $f\in\mathcal{H}(U\setminus A)$ et telle que tout point de A soit un pôle de f. On note $\mathcal{M}(U)$ l'ensemble des fonctions méromorphes ds U.

ex 51: cf ex 48.

prop 52: Si U ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $f,h\in\mathcal{H}(U)\setminus\{0\}$ alors $\frac{f}{h}\in\mathcal{M}(U)$.

prop 53: Si U ouvert connexe, $\mathcal{M}(U)$ est un corps.

2) Théorème des Résidus et applications.

déf 54 le coefficient a_{-1} du D.S.L de $f\in\mathcal{H}(U\setminus\{a\})$ en a est appelé résidu de f en a.

Thm 55: (Thm des Résidus). Soient U un ouvert convexe de $\mathbb{C}$, $a_1,\dots,a_n$ des pôles 2 à 2 distincts de f dans U, et $f\in\mathcal{H}(U\setminus\{a_1,\dots,a_n\})$. γ lacet de U tq $\forall k$, $a_k\notin \mathrm{Im}\,\gamma$.
Alors : $\int_\gamma f(z)\,dz = 2i\pi\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Ind}_\gamma(a_k)\,\mathrm{Res}(f,a_k)$

Appli 56: Soit $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$, $G_\alpha(x):=e^{-\alpha x^2}$ $\forall x\in\mathbb{R}$. $\widehat{G}_\alpha(\xi)=\int_{\mathbb{R}}G_\alpha(x)e^{-i\xi x}dx$.
Alors par thm 55, on a $\widehat{G}_\alpha=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,G_{\frac{1}{4\alpha}}$

Appli 57: $\forall\alpha\in]0,1[$ on a $\int_0^\infty\frac{dt}{t^\alpha(1+t)}=\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$

Coro 58: (Formule des compléments)
$\forall z\in\mathbb{C}$ tq $0<\mathrm{Re}\,z<1$, on a $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$.
dvpt 1

Thm 59 (csq de thm 55). (Principe de l'argument). Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et soit $f\in\mathcal{M}(U)$ non constante. Soit $K\subset\subset\mathbb{C}$ à bord régulier et soit. Supposons que f n'ait aucun zéro ni pôle dans ∂K.
Alors $\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial K}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = Z-P$ où $Z=\#$ zéros de f, $P=\#$ pôles de f (avec multiplicité)

Coro 60: (Thm de Rouché) γ lacet simple. $f,g\in\mathcal{H}(\mathrm{Int}(\gamma))$, $f,g\in\mathcal{H}(\partial\gamma)$.
Si $|f-g|<|f|$ sur γ alors $Z(f)=Z(g)$.

3) Prolongement méromorphe de deux fonctions spéciales Γ et ζ.

Thm 61: Soit $(f_n)\in(\mathcal{M}(U))^{\mathbb{N}}$ tq $\forall K\subset\subset U$, $\exists N_K\in\mathbb{N}$, $\forall n\ge N_K$, f_n n'a pas de pôles ds K et $\sum_{n\ge N_K} f_n$ converge uniformément sur K. Alors $\sum f_n\in\mathcal{M}(U)$ et $(\sum f_n)'=\sum f_n'$

Appli 62: la fonction Γ définie en appli 45 est holomorphe sur $\{z\in\mathbb{C},\ \mathrm{Re}\,z>0\}$ et se prolonge en fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. Ses pôles sont les entiers négatifs. Ces pôles sont tous simples.
$\boxed{\text{dvpt 2}}$ dvp

Rq (admis) À l'aide de Γ et de la formule des compléments, on peut montrer que la fonction $\zeta: s\mapsto\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ se prolonge en fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec comme seul pôle le point $s=1$. → C'est un pôle simple.

Formule des compléments

Leçons : 236, 245, *207, 235, 239*

[AM], section 8.4.4

Théorème

On rappelle qu'on définit la fonction Gamma d'Euler par :

$$\forall z \in \{s \in \mathbb{C} | \Re(s) > 0\}, \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} \, dt$$

On a l'égalité suivante :

$$\forall z \in \{s \in \mathbb{C} | 0 < \Re(s) < 1\}, \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

On commence par montrer le lemme qui suit.

Lemme

On a l'égalité suivante :

$$\forall \alpha \in]0,1[, \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$

Démonstration du lemme :

$\forall \alpha \in]0,1[$, on définit $I_\alpha := \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t)}$.

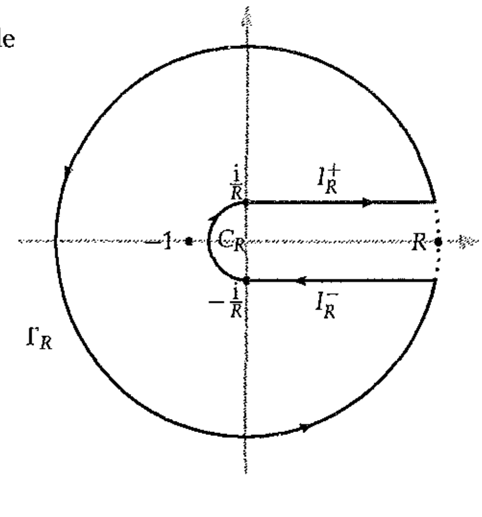
I_α est bien définie car c'est l'intégrale d'une fonction mesurable positive ; on a même $I_\alpha < +\infty$. En effet :

- $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha(1+t)}$ est continue sur $]0, +\infty[$ (donc localement intégrable) ;
- En 0 : $\frac{1}{t^\alpha(1+t)} \underset{t \to 0}{\sim} \frac{1}{t^\alpha}$, qui est intégrable car $0 < \alpha < 1$;
- En $+\infty$: $\frac{1}{t^\alpha(1+t)} \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{\alpha+1}}$, qui est intégrable car $\alpha + 1 > 1$.

On note $\Omega = \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}^+$ et $f : \left| \begin{array}{ccc} \Omega \backslash \{-1\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{1}{z^\alpha(1+z)} \end{array} \right.$, où l'on convient $z^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha\theta}$ quand $z = re^{i\theta}$, où $\theta \in]0, 2\pi[$.

La fonction f est holomorphe sur $\Omega \backslash \{-1\}$ et possède un pôle simple en -1 avec :

$$\mathrm{Res}(f, -1) = \lim_{z \to -1} (1+z) f(z) = \frac{1}{(-1)^\alpha} = e^{-i\pi\alpha}$$



Pour $R > 1$, on définit le chemin $\gamma_R = C_R \cup I_R^+ \cup \Gamma_R \cup I_R^-$, où :

- $C_R = \left\{ \frac{1}{R} e^{i\theta} \middle| \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \right\}$;
- $I_R^\pm = \left[\pm \frac{i}{R}, \pm \frac{i}{R} + \sqrt{R^2 - \frac{1}{R^2}} \right]$;
- $\Gamma_R = \left\{ Re^{i\theta} \middle| \theta \in [\theta_R, 2\pi - \theta_R] \right\}$, avec $\theta_R = \arcsin \frac{\frac{1}{R}}{R}$.

Le théorème des résidus donne donc :

$$\forall R > 1, \int_{\gamma_R} f(z) \, dz = 2i\pi e^{-i\pi\alpha}$$

On va passer à la limite quand $R \to +\infty$.
Tout d'abord :

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f\left(\frac{1}{R}e^{i\theta}\right) i\frac{1}{R}e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\frac{1}{R}}{\left(\frac{1}{R}\right)^\alpha \left|1+\frac{1}{R}e^{i\theta}\right|}\,\mathrm{d}\theta \leqslant \pi\frac{\left(\frac{1}{R}\right)^{1-\alpha}}{1-\frac{1}{R}} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

Aussi :

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^{2\pi} \mathbb{1}_{[\theta_R, 2\pi-\theta_R]}(\theta)\frac{iRe^{i\theta}}{R^\alpha e^{i\alpha\theta}\left(1+Re^{i\theta}\right)}\,\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{R}{R^\alpha\left|1+Re^{i\theta}\right|}\,\mathrm{d}\theta \leqslant 2\pi\frac{R^{1-\alpha}}{R-1} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

De plus : $\displaystyle\int_{I_R^+} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{\sqrt{R^2-\frac{1}{R^2}}} f\left(\frac{i}{R}+t\right)\mathrm{d}t = \int_0^{\sqrt{R^2-\frac{1}{R^2}}} \frac{1}{\left(t+\frac{i}{R}\right)^\alpha\left(1+t+\frac{i}{R}\right)}\,\mathrm{d}t.$

Comme $\displaystyle\left(t+\frac{i}{R}\right)^\alpha = \left(\sqrt{t^2+\frac{1}{R^2}}\exp\left(i\arctan\frac{\frac{1}{R}}{t}\right)\right)^\alpha \xrightarrow[R\to+\infty]{} t^\alpha$, on a :

- $\displaystyle\mathbb{1}_{\left]0,\sqrt{R^2-\frac{1}{R^2}}\right]}(t) f\left(\frac{i}{R}+t\right) \xrightarrow[R\to+\infty]{} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{+*}}(t)\frac{1}{t^\alpha(1+t)}$;
- $\displaystyle\left|\mathbb{1}_{\left]0,\sqrt{R^2-\frac{1}{R^2}}\right]}(t) f\left(\frac{i}{R}+t\right)\right| \leqslant \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{+*}}(t)\frac{1}{t^\alpha(1+t)}$ qui est intégrable.

Par théorème de convergence dominée, on déduit :

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{I_R^+} f(z)\,\mathrm{d}z = I_\alpha$$

Enfin, de la même façon, en utilisant le fait que $\displaystyle\left(t-\frac{i}{R}\right)^\alpha \xrightarrow[R\to+\infty]{} t^\alpha e^{2i\pi\alpha}$, on a :

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{I_R^-} f(z)\,\mathrm{d}z = -e^{-2i\pi\alpha} I_\alpha$$

Donc $\left(1-e^{-2i\pi\alpha}\right) I_\alpha = 2i\pi e^{-i\pi\alpha}$, c'est-à-dire :

$$I_\alpha = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$

■

Démonstration du théorème :

D'après le théorème des zéros isolés, il suffit de prouver l'égalité pour $z = \alpha \in]0,1[$. Soit donc $\alpha \in]0,1[$.
En utilisant le théorème de Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) &= \left(\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^{+\infty} s^{-\alpha}e^{-s}\,\mathrm{d}s\right) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} s^{-\alpha}t^{\alpha-1}e^{-t-s}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{s}\right)^\alpha e^{-(s+t)}\,\mathrm{d}s\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\end{aligned}$$

On réalise le changement de variables donné par le système $\begin{cases} u = s+t \\ v = \frac{s}{t}\end{cases}$ et dont le jacobien vaut

$$\left|\det\begin{pmatrix}1 & 1 \\ \frac{1}{t} & \frac{-s}{t^2}\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{t}+\frac{s}{t^2} = \frac{1}{t}+\frac{v}{t} = \frac{v+1}{t}$$

On en déduit donc :

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} v^{-\alpha}e^{-u}\frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}{v+1} = \int_0^{+\infty}\frac{1}{v^\alpha(v+1)}\int_0^{+\infty}e^{-u}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}v}{v^\alpha(v+1)} \\ &= \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}\end{aligned}$$

■

Références

[AM] É. AMAR et É. MATHERON – *Analyse complexe*, Cassini, 2004.

Prolongement de la fonction Γ d'Euler

Référence : Zuily-Queffélec p.313 pour le Lemme et Objectif Agrégation, exercice 2.10 p. 82 pour la suite

Définition

La fonction Gamma d'Euler est définie sur le demi-plan $\mathscr{P} = \{z \in \mathbb{C}, \Re(z) > 0\}$ par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t$$

Lemme

La fonction Γ est holomorphe sur $\mathscr{P}$.

Preuve :

Pour l'holomorphie, il suffit d'appliquer le ***Théorème d'holomorphie sous le signe intégral*** à la fonction

$$(z,t) \mapsto t^{z-1}\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{(z-1)\ln t}\mathrm{e}^{-t}$$

> Soit (X, μ) un espace mesuré, $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \mathcal{U} \times X \to \mathbb{C}$. Posons $\forall z \in \mathbb{C}$, $F(z) = \displaystyle\int_X f(z,t)\mathrm{d}\mu(t)$.
> H1) Pour tout $z \in \mathcal{U}$, $t \mapsto f(z,t)$ intégrable.
> H2) Pour presque tout t, $z \mapsto f(z,t)$ holomorphe.
> H3) Pour tout compact K de $\mathcal{U}$, $\exists g \in L^1(X)$ tq $|f(z,t)| \leqslant g(t)$ pour tout $z \in K$ et pour presque tout t.
> Alors F est holomorphe sur $\mathcal{U}$ et, $\forall z \in \mathcal{U}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $F^{(n)}(z) = \displaystyle\int_X \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z,t)\mathrm{d}\mu(t)$.

H1) $\forall z \in \mathscr{P}$, $t \mapsto \mathrm{e}^{(z-1)\ln t}\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$
H2) $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}$, $z \mapsto \mathrm{e}^{(z-1)\ln t}\mathrm{e}^{-t}$ est holomorphe sur $\mathscr{P}$
H3) Si K est un compact de $\mathscr{P}$, $\Re(z) \in [\varepsilon, M]$, où $\varepsilon > 0$ et[1]

$$\left|\mathrm{e}^{(z-1)\ln t}\mathrm{e}^{-t}\right| \begin{array}{lll} \leqslant & \mathrm{e}^{(\varepsilon-1)\ln t} = \dfrac{1}{t^{1-\varepsilon}} & \text{si } 0 < t \leqslant 1 \\ \overset{(\star)}{\leqslant} & t^{M-1}\mathrm{e}^{-t} & \text{si } t \geqslant 1 \end{array} \quad \text{et ces deux fonctions sont intégrables.}$$

D'où l'holomorphie de Γ. ■

But : montrer qu'il existe une fonction $F(z)$ holomorphe dans $\{z \in \mathbb{C} \;/\; z \neq -n \;,\; n \in \mathbb{N}\}$ qui coïncide avec la fonction $\Gamma(z)$ pour $z \in \mathscr{P}$. Ce prolongement sera encore noté Γ.

1. $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\Re(z)}$

Théorème

Γ se prolonge sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ sans zéro et admet des pôles simples en les $-n, n \in \mathbb{N}$.

Preuve :

Etape 1 : montrons que pour tout $z \in \mathscr{P}$, $\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$.

Découpons l'intégrale définissant Γ de la façon suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$$

On cherche donc à écrire maintenant la première intégrale sous forme d'une série. On développe l'exponentielle :

$$t^{z-1}e^{-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}$$

Il faut maintenant vérifier que l'on peut bien permuter somme et intégrale avec le théorème de Fubini (appliqué à la mesure produit de la mesure de Lebesgue et de la mesure de comptage).

Remarquons que pour $t > 0$, $|t^z| = |e^{z \ln t}| = e^{\Re(z) \ln t} = t^{\Re(z)}$.

On obtient alors, pour $t \in]0,1]$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n!}\right| \left|t^{n+z-1}\right| = t^{\Re(z)-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = t^{\Re(z)-1}e^t$.

Comme $\Re(z) > 0$, $\Re(z) - 1 > -1$ et la fonction $t \to t^{\Re(z)-1}e^t$ est intégrable[2] sur $]0,1]$.

Ainsi $\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}\right| dt < +\infty$

On peut donc appliquer le théorème de Fubini et inverser somme et intégrale.

$$\int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{n+z-1}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}.$$

On obtient bien, pour tout $z \in \mathscr{P}$,

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$$

Etape 2 : Montrons que $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et que ses pôles sont les entiers négatifs ou nuls et sont simples.

On utilise le ***Théorème sur les séries de fonctions méromorphes*** (cf Cartan pour preuve)

H1) Soit f_n des fonctions méromorphes.
H2) Pour tout compact K, $\exists N_K$ tel que, pour $n \geqslant N_K$, les f_n n'ont pas de pôles dans K et $\sum_{n \geqslant N_K} f_n$ CVU sur K.
Alors $\sum f_n$ est méromorphe et on peut dériver la série terme à terme.

H1) $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n z \mapsto \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec pour seul pôle (simple) $-n$.

H2) Soit K un compact de $\mathbb{C}$. Il existe $N_K \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset \overline{D(0, N_K)}$. Pour $n > N_K$, la fonction f_n n'a pas de pôle dans K.
De plus, pour tout $z \in K$, on a $|z+n| \geqslant n - |z| \geqslant n - N_K$.
Par conséquent, pour tout $z \in K$, $|f_n(z)| \leqslant \frac{1}{n!(n-N_K)}$ et donc $\sum_{n > N_K} f_n$ CVN sur K.

Donc, par théorème, f est bien une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ dont les pôles (simples) sont les entiers négatifs.

2. Il s'agit d'une comparaison avec les intégrales de Riemann. On peut dire que c'est $\leqslant e t^{\Re(z)-1}$ qui est intégrable par Riemann.

Etape 3 : On applique le ***Théorème d'holomorphie sous le signe intégral*** pour conclure.

H1) et H2) sont évidentes pour $f(z,t) = t^{z-1}e^{-t}$.
H3) On utilise la majoration ($\star$) faite dans la démonstration du **Lemme**. Et $t \mapsto t^{M-1}e^{-t} \in L^1([1,+\infty[)$.
Donc $z \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier.
Alors,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$$

établit une prolongement méromorphe de la fonction Γ sur $\mathbb{C}$. Le théorème de prolongement analytique entraîne de plus que c'est le seul prolongement analytique de Γ sur l'ouvert connexe $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$.

■

Notes :

✓ **A l'oral, bla**
✓ Rappel : Une fonction est méromorphe sur un ouvert $\mathcal{U}$ s'il existe un ensemble $\mathcal{P}$ de points isolés de $\mathcal{U}$ (appelés pôles de f) tel que f est holomorphe sur $\mathcal{U} \setminus \mathcal{P}$ (et si, en tout point $p \in \mathcal{P}$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{C}^*$ vérifiant $f(z) \underset{z \to p}{\sim} \dfrac{b}{(z-p)^n}$).
✓ Rappel : (principe de prolongement analytique) Soit $\mathcal{U}$ un ouvert connexe. Si deux fonctions analytiques *coïncident sur un sous ensemble $D \subset \mathcal{U}$ ayant un point d'accumulation dans $\mathcal{U}$, alors elles sont égales sur $\mathcal{U}$.*
♣ Leonhard EULER (1707 - 1783) est un mathématicien et physicien suisse, qui passa la plus grande partie de sa vie en Russie et en Allemagne. Il était notamment membre de l'Académie royale des sciences de Prusse à Berlin. Il fit d'importantes découvertes dans des domaines aussi variés que le calcul infinitésimal et la théorie des graphes. Il introduisit également une grande partie de la terminologie et de la notation des mathématiques modernes, en particulier pour l'analyse mathématique, comme la notion de fonction. Il est aussi connu pour ses travaux en mécanique, en dynamique des fluides, en optique et en astronomie.