240. Produit de convolution, transformation de Fourier. Application.

Cadre : $\mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue.

I - Le produit de convolution.

1.1 convolution de fonctions

déf 1 : soient $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ fonctions boréliennes. La convolée de f et g est définie par

$$f * g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$$
$$x \longmapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\, g(x-y)\, dy$$

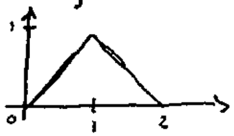
prop 2 : • $f*g$ est borélienne.

• le produit $*$ entre fonctions boréliennes positives est commutatif et associatif.

Exemples :

• $f * 0 = 0$ pour f borélienne positive

• $\mathbb{1}_{[0,1]} * \mathbb{1}_{[0,1]}(x) = (1-|x-1|)\, \mathbb{1}_{[0,2]}(x)$



déf 3 : soient $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ boréliennes. f et g sont convolables si pp x $y \mapsto f(y)\, g(x-y)$ est intégrable.
Leur produit de convolution est :

$$f*g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\, g(x-y)\, dy \quad \text{définie pp } x$$

prop 4 : • $f*g(x)$ et $g*f(x)$ existe simultanément et sont alors égales.

• Si $f_1 = f_2$ et $g_1 = g_2$ pp alors $f_1 * g_1 = f_2 * g_2$

• $|f*g|(x) \leq |f| * |g|(x)$ pp x

• Si $|f| * |g|(x) < +\infty$ partout, $x \mapsto f*g(x)$ est borélienne

• $\{f*g \neq 0\} \subset \{f \neq 0\} + \{g \neq 0\}$

remarque : on perd l'associativité.

$f = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$, $g = \mathbb{1}_{[-1,0]} - \mathbb{1}_{[0,1]}$, $h = 1$

$(f*g)*h \equiv 1$ et $f*(g*h) \equiv 0$

1.2. existence et propriétés

Thm 5 : Soient $f \in L^p$ et $g \in L^q$ tq $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors

• $f*g$ est une fonction uniformément C^0, bornée par $\|f\|_p \|g\|_q$,

• si de plus $1 < p, q < +\infty$, alors $\lim_{\|x\| \to +\infty} f*g(x) = 0$.

Cor 6 : Si $f, g \in C_c^0(\mathbb{R}^d)$ alors $f*g \in C_c^0(\mathbb{R}^d)$.

Thm 7 : $(L^1, +, \cdot, *)$ est une algèbre commutative.

remarque $*$ ne possède pas d'unité dans L^1

1.3. régularisat.

déf 8 : une suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ de L^1 est une approximation de l'unité si :

• $\forall n \geq 1$ $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n = 1$, • $\sup \|\alpha_n\|_1 < +\infty$, • $\forall \varepsilon > 0$ $\lim_n \int_{\|x\| > \varepsilon} \alpha_n(x)\, dx = 0$

Exemples sur $\mathbb{R}$ Cauchy : $\alpha_n(x) = \frac{n}{\pi(n^2+x^2)}$, Laplace : $\alpha_n(x) = \frac{1}{2n} e^{-\frac{|x|}{n}}$

Thm. 9 : Soient $(\alpha_n)_n$ une approx. de l'unité et $f \in L^p$ $(1 \leq p < \infty)$
Alors $\forall n \geq 1$ $\alpha_n * f \in L^p$ et $\alpha_n * f \xrightarrow{L^p} f$

Thm 10 : Soit $f \in L^\infty$. On a :
- si f est continue en x_0, $\lim_{n \to +\infty} \alpha_n * f(x_0) = f(x_0)$
- si f est unif C^0, $\lim_{n \to +\infty} \|\alpha_n * f - f\|_\infty = 0$

Thm 11 : Soient $\varphi \in C^k_c(\mathbb{R}^d)$, $f \in L^1_{loc}$. Alors $\varphi * f$ est de classe C^k et pour tout opérateur différentiel D d'ordre $n \leq k$, $D(\varphi * f) = (D\varphi) * f$.

déf : $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est une suite regularisante si :
- $(\alpha_n)_n$ est une approx. de l'unité
- $\forall n \geq 1$ $\alpha_n \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$.

Application
- $C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $(C_c(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)$
- $C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $(L^p(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_p)$ $1 \leq p < +\infty$

II - Transformée de Fourier

2.1. sur L^1

Thm 13 : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On appelle transformée de Fourier de f la fonction
$$\hat{f} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\xi \longmapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-i\langle x, \xi\rangle}\, dx.$$
$\hat{f}$ est continue, tend vers 0 en l'infini et bornée par $\|f\|_1$

Exemples sur $\mathbb{R}$: $f(x) = \frac{1}{2\alpha} \mathbb{1}_{[-\alpha,\alpha]}(x) \to \hat{f}(\xi) = \operatorname{sinc}(\alpha\xi)$

$f(x) = e^{-\alpha|x|} \to \hat{f}(\xi) = \dfrac{2\alpha}{\alpha^2 + \xi^2}$

$f(x) = e^{-\alpha x^2} \to \hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}$

Thm 14 . Soient $f, g \in L^1$, alors $\widehat{f * g} = \hat{f} \times \hat{g}$.
- Si $xf \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f}$ est dérivable et $\hat{f}' = \mathcal{F}(xf)$
- Si $f \in C^1$ et $f' \in L^1$, alors $\mathcal{F}(f') = i\xi \hat{f}$
- Si $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ alors $f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,\xi\rangle} \hat{f}(\xi)\, d\xi$

Cor. 15 : Si $f \in L^1$ et $\hat{f} = 0$ alors $f \equiv 0$.

2.2. sur l'espace de Schwartz

déf. 16 : $\varphi \in S(\mathbb{R}^d)$ si $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et si φ et ses dérivées sont à décroissance rapide.

exemple : $x \mapsto e^{-\|x\|^2} \in S(\mathbb{R}^d)$

rmq la topologie de $S(\mathbb{R}^d)$ est définie par les semi-normes $N_p(\varphi) = \max_{\substack{|\alpha| \leq p \\ |\beta| \leq p}} \|x^\alpha \partial^\beta \varphi\|_\infty$

prop 17 $S(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$

Thm 18 : la transformée de Fourier est un isomorphisme de $S(\mathbb{R}^d)$, continu, d'inverse $\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{(2\pi)^d} \bar{\mathcal{F}}$

2.3. sur L^2

lemme 19 : $L^1 \cap L^2$ est dense dans L^2

Thm 20 : La transformée de Fourier se prolonge en un isomorphisme sur L^2.

2.4. sur l'espace des distribution tempérée

déf 21 : $S'(\mathbb{R}^d)$ est l'ensemble des formes linéaires sur $S(\mathbb{R}^d)$ continues au sens où : $\exists p \in \mathbb{N}, \exists C > 0, \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^d)$

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq C N_p(\varphi)$$

exemples :
- $L^p \subset S'(\mathbb{R}^d) \quad \forall 1 \leq p \leq \infty$
- $Vp(\frac{1}{x}) \subset S'(\mathbb{R}^d)$

déf 22 : (TF de distribution)
Soit $u \in S'(\mathbb{R}^d)$, on a : $\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^d) \quad \langle \hat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \hat{\varphi} \rangle$
$\hat{u}$ est une distribution tempérée appelée transformée de Fourier de u.

Thm 23. $u \longmapsto \hat{u}$ est continue dans $S'(\mathbb{R}^d)$ et réalise un isomorphisme de $S'(\mathbb{R}^d)$ vers lui même d'inverse $\frac{1}{(2\pi)^d} \bar{\mathcal{F}}$

Thm 24 (formule sommatoire de Poisson), $\boxed{\text{DEV 1}}$
$\forall f \in S(\mathbb{R}) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(\cdot + n)$ converge normalement sur tout compact et on a : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{-2i\pi n x}$
où $\hat{f}(n) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi n t} dt$

Cor 25 : formule d'inversion de Fourier sur $S(\mathbb{R})$

Cor 26 : $\delta_{\mathbb{Z}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k \in S'(\mathbb{R})$ et $\delta_{\mathbb{Z}} = \hat{\delta}_{\mathbb{Z}}$

IV – Applications

4.1. résolution d'EDP

déf 27 : Soit D un opérateur differentiel. E est une solution élémentaire de D si on a : $DE = \delta$.

exemple dans $\mathbb{R}^3$ le laplacien admet $E = -\frac{1}{4\pi r}$ pour solution élémentaire.

thm 28 Soit D un opérateur différentiel et E une solution élémentaire. Pour $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, si $E * f$ a un sens alors $E * f$ est solut° de $Du = f$.

$\boxed{\text{DEV 2}}$

Thm 29 : l'équation de Schrödinger admet une solution élémentaire, distribution tempérée à support dans $\{t \geq 0\}$:

$$E(t,x) \longmapsto H(t)\, e^{-\frac{in\pi}{4}} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{i\frac{\|x\|^2}{4t}} \in S'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$$

4.2. applications en probabilité

prop 30 Soient X, Y deux va $\perp$ de densité f_X et f_Y. Alors $X+Y$ admet pour densité $f_X * f_Y$.

application
X, Y iid $\sim \mathcal{U}[0,1]$ alors $f_{X+Y}(x) = (1 - |x-1|)\mathbb{1}_{[0,2]}(x)$ → f° caractéristique

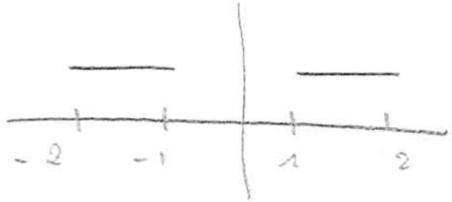
4.3. séries de Fourier

prop 31 : $S_n(f) = D_n * f \quad \Sigma_n(f) = K_n * f$
avec $D_n = \sum_{k=-n}^{n} e_k \quad K_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k \quad e_n : x \mapsto e^{inx}$

Annexe : $\hookrightarrow$: injection continue

$$
\begin{tikzcd}
C_c^\infty \arrow[r, hook] \arrow[dd, hook] & \mathcal{S} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & C^\infty \arrow[dd, hook] \\
& L^p \ (1 \leq p \leq +\infty) \arrow[d, hook] & \\
\mathcal{E}' \arrow[r, hook] & \mathcal{S}' \arrow[r, hook] & \mathcal{D}'
\end{tikzcd}
$$

- approx de l'unité. $\alpha_n \geq 0$ non indiqués. Ça marche qd m̂ ?
- vitesse de convergence de $\alpha_n * f \to f$.
- $\mathcal{C}^\infty_c$ dense ds $\mathbb{L}^p$? à démontrer.
- Transformée de Fourier de :



- fonct° paire
- déphasage
- linéarité

- Topologie sur S.
  - espace de Fréchet.
- ici sur $\mathbb{R}^d$ → peut-on faire sur d'autres espaces. - transformée de Fourier discrète
- convolut° de la ~~transformée~~ ~~de~~ séries de Fourier ⇒ pas la m̂ déf car pas m̂ borne de l'intégrale ⚠ pas le m̂ cadre.
- Transformée de Fourier de $\frac{1}{1+x^4}$.

⇒ Mettre $S(\mathbb{R}^d)$ obligatoire.

S' non mais l'avoir sous le coude.