239

Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et Applications.

Cadre : (X,μ) est un espace mesuré et (E,d) un espace métrique. On considère une fonction $f : X\times E \to \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(x,t)\mapsto f(x,t)$, et on étudie $F : t \mapsto \int_E f(x,t)\,d\mu(x)$.

I - Étude de la régularité et applications

1) Continuité

Thm 1 : On suppose : i) $\forall t\in E$ $x\mapsto f(t,x)$ mesurable sur X.
ii) pour presque tout $x\in X$, $t\mapsto f(t,x)$ est continue en $t_0\in E$
iii) $\exists g\in L^1$ positive telle que $|f(t,x)|\leq g(t)$, ppt $x\in X$ et $\forall t\in E$ (Hypothèse de domination).
Alors F est continue en t_0.

Coro 2 : (Continuité sous le signe intégral) on remplace iii) du thm 1 par : iii) $\forall K\subset E$ compact, $\exists g\in L^1$ positive telle que $|f(x,t)|\leq g(t)$ pp.t $x\in X$ et $\forall t\in K$.
Alors F est continue sur E.

Exemple 3 : Soit $\Gamma : x\mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt$, $x>0$. Γ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

C-ex 4 : • Soit $f : \mathbb{R}\times[0,1] \to \mathbb{R}$, $(x,t)\mapsto 1_{\mathbb{Q}}(x)$

$F : x\mapsto \int_0^1 f(x,t)dt$ est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$

• Soit $f : [0,+\infty[\times[0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $(x,t)\mapsto xe^{-xt}$

$F : x\mapsto \int_0^{+\infty} f(x,t)dt$ est bien définie mais pas continue en 0.

2) Dérivabilité

$E = I$ ouvert de $\mathbb{R}$.

Th 5 : On suppose : i) $\forall t\in I$, $x\mapsto f(x,t)\in L^1(X)$
ii) pour presque tout $x\in X$, $t\mapsto f(x,t)$ est dérivable sur I.
iii) $\forall K\subset I$ compact, $\exists g\in L^1$ telle que $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leq g(t)$ ppt $x\in X$, et $\forall t\in K$. Alors :
1) $\forall t\in I$ $x\mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\in L^1(X)$ et 2) F est dérivable sur I et $F'(t) = \int_E \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,d\mu(x)$. $\forall t\in I$

Rq 6 : Si dans ii) on remplace dérivable sur I par $\mathcal{C}^2$ sur I alors F est $\mathcal{C}^2$ sur I.

Ex 7 : Soit $F : x\mapsto \int_0^1 \frac{t^{x-1}-1}{\ln t}dt$ alors F est $\mathcal{C}^2$ et pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$ $F(x) = \ln(x)$. $\forall x>0$.

C-ex 8 : Soit $f : \mathbb{R}\times[0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $(x,t)\mapsto x^2e^{-t|x|}$; $f\in\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}\times[0,+\infty[$. Le calcul donne $F(x) = |x|$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Mais $F(x) = |x|$ ne l'est pas.

Th 9 : Soit $k\in\mathbb{N}$, en remplaçant ii) et iii) dans le th 5 par
ii) pour presque tout $x\in X$, $t\mapsto f(x,t)\in\mathcal{C}^k(I)$
iii) $\forall j\in[\![1,k]\!]$, $\forall K\subset I$ compact, $\exists g\in L^1$, $\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j} f(x,t)\right|\leq g(t)$, ppt $x\in X$ et $\forall t\in K$ alors
1) $\forall t\in I$, $t\mapsto \frac{\partial^j}{\partial x^j} f(x,t)\in L^1(E)$ et 2) $F\in\mathcal{C}^k(I)$ et $F^{(j)}(t) = \int \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j (f(x,t))\,d\mu(x)$ $\forall j\in[\![0,\dots,k]\!]$.

Ex 10 : $\Gamma : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x\mapsto \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ est de classe $\mathcal{C}^\infty(]0,+\infty[)$ et $\forall p\in\mathbb{N}$ $\forall x>0$ $\Gamma^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} (\log t)^p e^{-t} t^{x-1}dt$

Ex 11 : Étude de la fonction de Bessel : $x\mapsto \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(nt - x\sin t)\,dt$ pour $x\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$.

Th 12 : (Formule sommatoire de Poisson)
Soit $f : \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $f'(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ lorsque $|x|\to+\infty$. Alors
$\forall x\in\mathbb{R}$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{2i\pi nx}$ où $\forall n\in\mathbb{Z}$ $\hat{f}(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi nt}dt$

Appl 13 : $\forall s>0$ $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 s} = s^{-1/2}\sum_{h=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi h^2/s}$.

3) Holomorphie

Th 14 : (holomorphie sous le signe intégral) : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \times X \to \mathbb{C}$. On suppose que :

i) $\forall z \in \Omega$, $x \mapsto f(z,x) \in L^1(X)$

ii) pour presque tout $x \in X$, $z \mapsto f(z,x)$ est holomorphe sur Ω

iii) $\forall K \subset \Omega$ compact, $\exists g \in L^1$ positive telle que $|f(z,x)| \leq g(x)$ $\forall z \in K$ et presque partout en x. Alors

1) $F : z \mapsto \int_X f(z,x) d\mu(x)$ est holomorphe sur Ω

2) $F'(z) = \int_X \frac{\partial}{\partial z} f(z,x) d\mu(x)$ et 3) $\forall n \in \mathbb{N}$ $F^{(n)}(z) = \int_X \frac{\partial^n}{\partial z^n} f(z,x) d\mu(x)$

Rq 15 : Seule f nécessite d'être dominée ici.

Appli 16 : $\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ définie sur $P = \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) > 0\}$ est holomorphe sur P et se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. DEV ①

Ex 17 : Transformée de Fourier d'une gaussienne. Soit $f : x \mapsto e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, alors $\forall t \in \mathbb{R}$ $\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-x^2} dt$

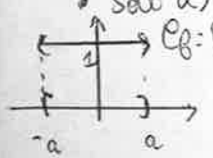
II - Produit de convolution, applications :

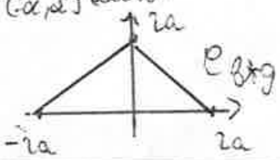
1) Définition et premières propriétés :

Def 18 : Pour deux fonctions $f, g \in \mathbb{R}$, si $y \mapsto f(y)g(x-y)$ est intégrable $\forall y \in \mathbb{R}$, pour $x \in \mathbb{R}$ on définit la convolée de f et g par $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x-y) dy$.

Prop 19 : Soit $x \in \mathbb{R}^d$ $f*g(x)$ existe $\Leftrightarrow$ $g*f(x)$ existe. Alors $f*g = g*f$

Ex 20 :
- $f*0 = 0$
- Soit $\alpha > 0$ et $f = g = 1\!\!1_{[-a,a]}$ alors :





Prop 21 : Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ alors $f*g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

Prop 22 : Si $f \in L^p(\mathbb{R})$, $g \in L^q(\mathbb{R})$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors $f*g$ est bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}$, et $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$. De plus si $p > 1$ $\lim_{|x| \to \infty} f*g(x) = 0$.

Prop 23 : Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^p(\mathbb{R})$, $p \in [1, +\infty]$ alors $f*g \in L^p(\mathbb{R})$ et $\|f*g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$

2) Convolution et dérivation :

Th 24 : Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^k_c(\mathbb{R})$, alors $f*g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ et $\partial^\alpha(f*g) = f*(\partial^\alpha g)$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}$, $|\alpha| \leq k$.

Rq 25 : Le théorème reste vrai pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ à dérivées bornées

Prop 26 : Si de plus $f \in \mathcal{C}^n_c$ et $g \in \mathcal{C}^m_c$ alors $f*g \in \mathcal{C}^{n+m}$ et $(f*g)^{(n+m)} = f^{(n)} * g^{(m)}$

Appli 27 : Soit P un polynôme de degré n et $g \in L^1_{loc}$ alors $P*g$ est un polynôme de degré n.

3) Regularisation

Prop 28 : Si $g \in \mathcal{C}^\infty_c$, $f \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow f*g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Ex 29 : $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{c} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & \text{si } |x| < \alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ $(= \Phi(x))$ avec c tq $\|g\|_1 = 1$ est $\mathcal{C}^\infty_c$.

Ex 30 : Si g est la gaussienne de paramètre $t > 0$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}$ $g(x) = G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t}$, alors $f \in L^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow f*g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

4) Identités approchées et approximation

Def 31 : Une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonction intégrables est une identité approchée si : i) $\varphi_n(t) \geq 0$ presque pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. ii) $\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(t) dt = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et iii) $\forall y > 0$ $\lim_{n \to \infty} \int_{|t| > y} \varphi_n(t) dt = 0$

Ex 32 : Soit $\varphi \geq 0$ une fonction intégrable telle que $\int_{\mathbb{R}} \varphi = 1$ la suite de fonctions : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\varphi_n(t) = n\varphi(nt)$ est une identité approchée

Appli 33 :
- Pour $\varphi = \Phi$ (Ex 29) on construit des identités approchées $\mathcal{C}^\infty_c$.
- Pour $\varphi = G_t$ (Ex 30) on construit des identités approchées à décroissance rapide.

Th34 : Soit $(\varphi_n)_n$ une identité approchée

i) Si f est mesurable bornée sur $\mathbb{R}$ alors $(\varphi_n * f)(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ en tout point où f est continue

ii) Si $f \in \mathcal{C}_b^0$, $(\varphi_n * f)(x)$ converge uniformément sur tout compact vers f. De plus si f est uniformément continue la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$.

iii) Si $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < +\infty$, alors la suite de fonctions $(f * \varphi_n)_n$ de $L^p(\mathbb{R})$ converge dans $L^p(\mathbb{R})$ vers f.

Appli 35 : $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$.

Ex 36 : Soit $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Le noyau de Fejér est une identité approchée sur $\mathbb{T}$: $K_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2$.

Et si f est continue et 2π-périodique alors $(f * K_N)_N$ cv unif vers f

III - Transformé de Fourier et probabilités :

1) Transformé de Fourier

Def 37 : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On appelle transformée de Fourier et on note $\hat{f}$ ou $F(f)$ l'application définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x)dx.$$

Rq 38 : $\hat{f}$ est parfois défini par $\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi tx} f(x)dx$.

Th 39 : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors : i) $\hat{f}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et est uniformément continue ; ii) $\hat{f}$ est uniformément bornée et on a : $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

iii) $\lim_{|t|\to\infty} \hat{f}(t) = 0$ (Thm de Rieman-Lebesgue).

Th 40 : $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$, $f \mapsto \hat{f}$ est une application linéaire, continue, injective, non surjective

Ex 41 : • $\widehat{1\!\!1_{[a,b]}}(t) = \begin{cases} b-a & \text{si } t = 0 \\ \frac{\sin(b-a)t}{t} e^{-it(a+b)t} & \text{sinon} \end{cases}$

• $\widehat{e^{-a|x|}}(t) = \frac{2a}{a^2+t^2}$ pour $a > 0$ fixé.

Th 42 : • Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ continue de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et telle que $f' \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\mathcal{F}(f')(t) = it\hat{f}(t)$

• Si de plus f est $\mathcal{C}^n$ par morceaux et telle que, $\forall k \leq n$, $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$ alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $1 \leq k \leq n$ $\mathcal{F}(f^{(k)})(t) = (it)^k \mathcal{F}(f)(t)$.

Th 43 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $t \mapsto t^k f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ pour tout $0 \leq k \leq n$, alors $\hat{f} \in \mathcal{C}^n$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}\mathcal{F}(f)(t) = (-i)^k \mathcal{F}(t^k f(x))(t) \quad \text{pour } 0 \leq k \leq n.$$

Th 44 : • Si $(f,g) \in L^1(\mathbb{R}) \times L^1(\mathbb{R})$ alors $\mathcal{F}(f*g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$.

• Si de plus $\hat{f}$ et $\hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$ alors $fg \in L^1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(fg) = \hat{f} * \hat{g}$.

Appli 45 : (du th 40) : Densité des polynômes orthogonaux.

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. On appelle ρ une fonction poids quand $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x)dx < +\infty$. Alors l'espace $L^2(I,\rho) = \{f : I \to \mathbb{R}$, mesurable : $\int_I f^2 \rho dx < \infty\}$ muni du produit scalaire $\langle f,g \rangle_\rho = \int_I f(x)g(\bar{x})\rho(x)dx$ est un espace de Hilbert.

Prop 46 : Il existe une unique famille $(P_n)_n$ de polynôme orthogonaux deux à deux et unitaires tels que $\deg P_n = n$. Si $\exists a > 0$ tel que : $\int_I e^{a|x|}\rho(x)dx < \infty$, alors $(P_n)_n$ forme une base Hilbertienne de $L^2(I,\rho)$

--- DEV ②

Th 47 : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ alors $f(t) = \int e^{ixt}\hat{f}(x)dx$ pp.

Ex 48 : Soit $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ alors $\forall t \in \mathbb{R}$ $\hat{f}(t) = e^{-|t|}$.

2) Transformée de Fourier d'une loi de probabilité :

Def 49 : Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle fonction caractéristique de X la fonction $\varphi_X : t \mapsto \mathbb{E}(e^{itx}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mathbb{P}_X(x)$.

Prop 50 : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t) \Leftrightarrow \mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$ pour X, Y v.a réelles.

Prop 51 : $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}$ $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$

Ex 52 : • $X \sim \mathcal{U}([a,b])$, $\forall t \neq 0$ $\varphi_X(t) = e^{i(a+b)t}\frac{\sin(b-a)t}{(b-a)t}$

• $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$ • $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ $\varphi_X(t) = e^{imt}e^{-\sigma^2t^2/2}$