239

Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

I] Définition et régularité des intégrales à paramètres.

• Thm ① : (Convergence dominée)

• Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ telle que :

- μ-ppx $f_n(x)$ converge lorsque n tend vers $+\infty$
- Il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ tel que μ-ppx, $\forall n\in\mathbb{N}$ $|f_n(x)| \leq |g(x)|$

Alors il existe $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ telle que :

- f_n converge simplement presque partout vers f.
- $\lim_n \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_n f_n d\mu = \int_X f d\mu$ et $\int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

• Rq ② : Le théorème ① reste vrai en prenant les f_n et g dans $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$

• Dans la suite, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré, (E,d) un espace métrique et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I.1] Continuité sous le signe intégrale.

• Thm ③ Soit $\varphi : \begin{array}{l} X\times E \longrightarrow \mathbb{K} \\ (x,t) \longrightarrow \varphi(x,t) \end{array}$ et $t_0 \in E$ tels que :

(i). $\forall t\in E$ $x \longrightarrow \varphi(x,t)$ est mesurable.

(ii). μpp$x\in X$, $t \longrightarrow \varphi(x,t)$ est continue en t_0.

(iii). Il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ tel que $\forall t\in E$, μpp$x\in X$:

$$|\varphi(t,x)| \leq |g(x)|.$$

Alors $t \mapsto F(t) = \int_X \varphi(x,t)dx$ est continue en t_0.

• Cor ④. Avec les notations du thm ③, en remplaçant (ii) par "(ii)' μpp$x\in X$, $t \mapsto \varphi(x,t)$ est continue sur E" alors F est continue sur E.

• Expl ⑤. On définit la fonction Γ d'Euler par :

$$\forall x>0,\ \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

Alors Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

• Cor-Expl ⑥ $x \mapsto \int_0^{+\infty} t e^{-xt} dt$ n'est pas continue en 0.

I.2] Dérivabilité.

• thm ⑦. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $\varphi : X\times I \to \mathbb{K}$ tels que :

(i). $\forall t\in I$, $x \mapsto \varphi(x,t) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$.

(ii). μ-pp$x\in X$, $t \mapsto \varphi(x,t)$ est dérivable sur I.

(iii). Il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ tel que :

$$\forall t\in E, \mu\text{-pp}x\in X\ |\partial_t\varphi(x,t)| \leq |g(x)|.$$

Alors $t \mapsto F(t)$ est dérivable sur I de dérivée : $F' : t \mapsto \int_X \partial_t \varphi(x,t)dx$.

• Cor ⑧ : Dans le thm ⑦, en remplaçant (ii) par "(ii)'. μ-pp$x\in X$ $t \mapsto \varphi(x,t) \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{K})$" on obtient que $F \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{K})$.

• Expl ⑨ : • $\Gamma \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t) t^{x-1} e^{-t} dt$$

• Cor ⑩ : • Dans le thm ⑦, en remplaçant (ii) et (iii) par :

- (ii)'. μ-pp$x\in X$, $t \mapsto \varphi(x,t)$ est $\mathcal{C}^p$ sur I.
- (iii)'. Il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ tel que :

$$\forall k\in[\![1,p]\!], \forall t\in E, \mu\text{-pp}x\in X\ \left|\frac{\partial^k\varphi}{\partial t^k}(x,t)\right| \leq |g(x)|,$$

on obtient que $F \in \mathcal{C}^p(I,\mathbb{K})$.

• Expl ⑪ : $\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$ et $\forall p\in\mathbb{N}, \forall x\in\mathbb{R}_+^*$: $\Gamma^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^p t^{x-1} e^{-t} dt$.

• Appli ⑫ : Calcul de l'intégrale de Gauss via l'étude des deux fonctions auxiliaires : $A : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \left(\int_0^t e^{-x^2}dx\right)^2 \end{array}$ et

$$B : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ t \mapsto -\int_0^1 \dfrac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2} dx \end{array}$$

I.3) Holomorphie sous le signe intégrale

• **thm 13.** Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\varphi : \begin{array}{l} \Omega \times X \to \mathbb{K} \\ (z,x) \mapsto \varphi(z,x) \end{array}$ tel que :

(i). $\forall z \in \Omega$, $x \mapsto \varphi(z,x)$ est mesurable.

(ii). μ-pp $x \in X$, $z \mapsto \varphi(z,x)$ est holomorphe sur Ω.

(iii). Il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ tel que $\forall z \in \Omega$, μ-pp $x \in X$:

$$|\varphi(z,x)| \leq |g(x)|.$$

Alors $F : z \mapsto \int_X \varphi(z,x)dx$ est holomorphe sur Ω et de plus : $\forall z \in \Omega$, $x \mapsto \partial_z \varphi(z,x)$ est intégrable et $F'(z) = \int_X \partial_z \varphi(z,x) d\mu$.

• **Expl 14.** Γ est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

I.4) Comportement assymptotique

DVLP 1

• **thm 15.** (Méthode de Laplace) Soit $I =]a;b[\subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ continue, $\varphi \in \mathcal{C}^2(I,\mathbb{R})$ et $x_0 \in I$ tels que :

- $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\int_a^b |f(x)| e^{-t\varphi(x)} dx < +\infty$
- $\varphi'(x) = 0 \iff x = x_0$
- $\varphi''(x_0) > 0$
- $f(x_0) \neq 0$.

Alors : $$F(t) = \int_a^b f(x) e^{-t\varphi(x)} dx \underset{t \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{t\varphi''(x_0)}} \cdot f(x_0) \cdot e^{-t\varphi(x_0)}$$

• **Appli 16.** $\Gamma(t+1) \underset{t \to +\infty}{\sim} t^t e^{-t} \sqrt{2\pi t}$

• **Appli 17.** Soit $\alpha > 0$. Alors $\int_0^{+\infty} x^{-\alpha x} t^x dx \underset{t \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{e\alpha}}\, t^{1/2\alpha} \exp\left(\frac{\alpha t^{1/\alpha}}{e}\right)$

• **Appli 18 :** (Formule de Stirling) $n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} e^{-n}$.

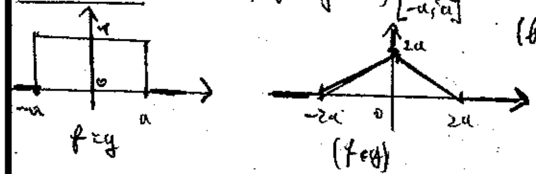
II) Produit de convolution

II.1) Définition et propriétés du produit de convolution

• **def 19.** Soient f,g des fonctions définies presque partout sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes. Leur produit de convolution est, sous réserve d'existence, défini par : $(f*g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) g(t-x) dx$.

• **prop 20.** Si $(f*g)(t)$ existe, $(g*f)(t)$ aussi et $(f*g)(t) = (g*f)(t)$.

• **Expl 21.** $a \in \mathbb{R}_+^*$, $f = g = \mathbb{1}_{[-a;a]}$.



$$(f*g)(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq -2a \\ t+2a & \text{si } -2a \leq t \leq 0 \\ 2a-t & \text{si } 0 \leq t \leq 2a \\ 0 & \text{si } 2a \leq t \end{cases}$$

• **Prop 22 :** Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $f*g$ est défini p.p et on a : $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$.

• $f \in L^1, g \in L^p \Rightarrow f*g \in L^p$ et $\|f*g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^p}$.

• $f,g \in L^1 \Rightarrow f*g \in L^1$ et $\|f*g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$

• **thm 23.** Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ avec g, g' bornées sur $\mathbb{R}$. Alors $(f*g) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $(f*g)'(x) = f*g'(x)$.

• **cor 24.** Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$, et $g^{(k)}$ bornée pour $k \in [\![0;n]\!]$ alors $(f*g) \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ et pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $(f*g)^{(k)} = f*g^{(k)}$.

II.2) Régularisation et convolution.

• **def 25** On dit qu'une suite $(\theta_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ est une approximation de l'unité si :

(i) $\forall n \geq 1$ $\int_{\mathbb{R}} \theta_n(t)dt = 1$

(ii) $\sup_{n \geq 1} \int_{\mathbb{R}} |\theta_n(t)| dt < +\infty$

(iii) $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_n \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon;\varepsilon]} |\theta_n(t)| dt = 0$

• prop 26 : Soit $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'unité et $f\in L^p(\mathbb{R})$.
(i). Si $1\leq p\leq +\infty$, $\forall n\in\mathbb{N}$ $(f*\phi_n)\in L^p(\mathbb{R})$ et $f*\phi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_p} f$
(ii). Si $p=+\infty$, f bornée et uniformément continue alors $(f*\phi_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_\infty} f$

• Appli 27 : (Théorème de Fejér)
• Pour $n\in\mathbb{Z}$ on pose : $e_n : x\to e^{inx}$. Pour $N\in\mathbb{N}$: $D_N=\sum_{n=-N}^{N} e_n$ (noyau de Dirichlet). $K_N := \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n$ (noyau de Fejér). On a alors pour $f\in L^p(\mathbb{R})$ (resp. continue) 2π-périodique convergence L^p (resp. $\|\cdot\|_\infty$) au sens de Césaro de $(D_n*f)_{n\in\mathbb{N}}$. Autrement dit $K_n*f \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_p, \|\cdot\|_\infty} f$.

• Appli 28 : Les fonctions continues à support compact sont denses dans $L^p(\mathbb{R})$ pour $1\leq p<+\infty$.

III] Transformée de Fourier

• def 29. Soit $f\in L^1(\mathbb{R})$. On définit sa transformée de Fourier par :
$$\hat{f} : \begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{C}\\ \xi\to\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-it\xi}dt\end{array}$$

• Rq 30. $f\in L^1(\mathbb{R})$ donc $\hat{f}$ est bien défini pour tout $\xi\in\mathbb{R}$ et est bornée.
• prop 31 Soit $f\in L^1(\mathbb{R})$. Alors $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
• Lemme 32 : (Riemann-Lebesgue). $\hat{f}(\xi)\xrightarrow[|\xi|\to+\infty]{} 0$ pour tout $f\in L^1(\mathbb{R})$.
• prop 33 : Si $f\in L^1(\mathbb{R})$ et $t\mapsto tf(t)\in L^1(\mathbb{R})$ alors $\hat{f}\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $\forall\xi\in\mathbb{R}$ on a : $\hat{f}'(\xi)=(-i)\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)e^{-it\xi}dt = (-i)\widehat{(t\to tf(t))}(\xi)$.
• thm 34 : Si $f\in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f}\in L^1(\mathbb{R})$ alors :
$$\forall t\in\mathbb{R}\ f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(\xi)e^{i\xi t}d\xi$$
• Cor 35 : $\begin{array}{l}L^1(\mathbb{R})\to C_0(\mathbb{R})\\ f\to\hat{f}\end{array}$ est injective.
• Excpl 36 : Soit $f : x\to\frac{1}{1+x^2}$. Alors $\forall\xi\in\mathbb{R}$ $\hat{f}(\xi)=\pi e^{-|\xi|}$

• Appli 37 (DVLP 2) : (Densité des polynômes orthogonaux)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\rho : I\to\mathbb{R}_+^*$ mesurable tel qu'il existe $\alpha>0$ vérifiant $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)dx<\infty$. Alors l'unique famille de polynômes orthogonaux $(P_n)_{n\geq 1}$ vérifiant $\forall n\geq 1$ $\deg P_n=n$ forme une base Hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.
• thm 38 : Si $f,g\in L^1(\mathbb{R})$ alors $\widehat{f*g}=\hat{f}\hat{g}$.
• Excp 39 : Calcul de $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(x)}{x^2}dx$.

III.2] Transformée de Fourier et probabilités

• def 40 : Soit X une variable aléatoire réelle, on appelle fonction caractéristique de X la fonction $\varphi_X : t\to\mathbb{E}[e^{iXt}]$. On peut aussi l'écrire : $\varphi_X : t\to\int_{\mathbb{R}} e^{itx}P_X(dx)$.

• thm 41 : La fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle caractérise la loi de cette variable aléatoire. Autrement dit, la transformée de Fourier définie sur l'espace des probabilités sur $\mathbb{R}$ est injective.
• Excpl 42 : Si $X\sim\mathcal{P}(\lambda)$ alors $\forall t\in\mathbb{R}$: $\varphi_X(t)=e^{-\lambda}e^{\lambda e^{it}}$.
• Excpl 43 : Si X est à densité f, alors $\varphi_X(t)=\int_{\mathbb{R}} e^{itx}f(x)dx=\check{\hat{f}}(t)$, $\forall t\in\mathbb{R}$.
• Cor 44 : Si X admet un moment d'ordre p alors $\varphi_X\in\mathcal{C}^p(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

• Appli 45 : $\varphi_X^{(p)}(0)=(i)^p\,\mathbb{E}[X^p]$.

• thm 46 : (P. Levy). Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles et X une v.a.r. On a équivalence entre :
i) $X_n\xrightarrow{\mathcal{L}} X$
ii) $\varphi_{X_n}\to\varphi_X$ simplement.
• prop 47 . Soit $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires. On a équivalence entre :
i) $X_1\dots X_n$ indépendantes mutuellement
ii) $\varphi_{X_1+\dots+X_n}=\prod\varphi_{X_i}$. FAUX

$\varphi_{\begin{pmatrix}X_1\\ \vdots\\ X_n\end{pmatrix}}(t)=\prod\varphi_{X_i}(t_i)$

ef :

- Théorie de l'intégration (convolution et transformée de Fourier), Briane & Pagès
- Analyse de Fourier (théorie et applications pour l'ingénieur et le physicien), Patrice Strasillon
- ~~G~~ourdon, analyse
- Analyse pour l'agrégation Zuily, Queffelec

Méthode de Laplace

Théorème . *Soient $I =]a,b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\varphi \in C^2(I,\mathbb{R})$ tels que*

- $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \displaystyle\int_a^b |f(x)| e^{-t\varphi(x)} \mathrm{d}x < \infty$
- $\varphi'(x) = 0 \iff x = x_0$
- $\varphi''(x_0) > 0$
- $f(x_0) \neq 0$

Alors

$$F(t) := \int_a^b f(x) e^{-t\varphi(x)} \mathrm{d}x \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{t\varphi''(x_0)}} f(x_0) e^{-t\varphi(x_0)}.$$

Démonstration

Premier cas : $\varphi(x) = x^2$

On va décomposer F en deux intégrales telles que l'une soit négligeable par rapport à l'autre. On aura alors un équivalent de F en $+\infty$. Soit $\eta > 0$ tel que $[-\eta,\eta] \subset]a,b[$, on a ici $]a,b[=\mathbb{R}$.

$$F(t) = \int_{|x|\leq\eta} f(x) e^{-t\varphi(x)} \mathrm{d}x + \int_{|x|\geq\eta} \mathbb{1}_{]a,b[}(x) f(x) e^{-t\varphi(x)} \mathrm{d}x = F_1(t) + F_2(t).$$

On s'intéresse tout d'abord à F_1, on effectue le changement de variable $u = \sqrt{t}x$

$$F_1(t) = \int_{\mathbb{R}} h(x) e^{-tx^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}} h\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right) e^{-u^2} \mathrm{d}u$$

où $h(x) = \mathbb{1}_{[-\eta,\eta]}(x) f(x)$ est bornée car f est continue. On a alors :

- $t \mapsto h(\frac{u}{\sqrt{t}}) e^{-u^2}$ admet une limite en $+\infty$ qui est $h(0) e^{-u^2}$,
- $h(\frac{u}{\sqrt{t}}) e^{-u^2} \leq C e^{-u^2}$ où C est le sup de f sur $[-\eta,\eta]$,

et on applique le théorème de convergence dominée qui nous donne,

$$F_1(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} h(0)\sqrt{\frac{\pi}{t}}.$$

On s'intéresse ensuite à F_2, pour $t \geq 1$ on a

$$|F_2(t)| \leq \int_{|x|\geq\eta} |f(x)| e^{-x^2} e^{(1-t)x^2} \mathrm{d}x \leq e^{(1-t)\eta^2} \underbrace{\int_{|x|\geq\eta} |f(x)| e^{-x^2} \mathrm{d}x}_{M} \leq M e^{(1-t)\eta^2}.$$

$\mathbb{R}$

Donc

$$\left|\frac{F_2(t)}{F_1(t)}\right| \leq \frac{M e^{(1-t)\eta^2}}{|F_1(t)|}$$

ce qui est équivalent quand $t \to +\infty$ à

$$M\sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{(1-t)\eta^2} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On a donc, puisque $h(0) = f(0)$, $F(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} f(0)\sqrt{\frac{\pi}{t}}$.

Deuxième cas : généralisation

On va effectuer un changement de variable pour se ramener au premier cas. On a $F(t) = \int_a^b f(x)e^{-t\varphi(x)}\mathrm{d}x$, donc on a besoin d'avoir $\varphi(x)-\varphi(x_0) = u^2 = \psi(x)^2$, car on doit avoir $\psi(x)$ bien définie, donc quelque chose de positif sous la racine (ce qui est possible puisque x_0 est le minimum de φ), c'est-à-dire,

$$u = \psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\varphi(x)-\varphi(x_0)} & \text{si } x > x_0 \\ -\sqrt{\varphi(x)-\varphi(x_0)} & \text{si } x < x_0 \end{cases}.$$

Alors

$$F(t) = \int_\alpha^\beta f\Big(\psi^{-1}(u)\Big)e^{-tu^2}e^{-t\varphi(x_0)}\frac{\mathrm{d}u}{\psi'\Big(\psi^{-1}(u)\Big)},$$

avec α la limite de ψ en a et β la limite de ψ en b. En effectuant un développement à l'aide de la formule de Taylor on obtient

$$\frac{1}{\psi'(x)} = \frac{2\sqrt{\varphi(x)-\varphi(x_0)}}{\varphi'(x)} \underset{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}{\sim} \frac{2\sqrt{\frac{\varphi''(x_0)}{2}(x-x_0)^2}}{\varphi''(x_0)(x-x_0)} = \sqrt{\frac{2}{\varphi''(x_0)}}.$$

Ce qui nous donne donc $h(u) = \dfrac{f\Big(\psi^{-1}(u)\Big)}{\psi'\Big(\psi^{-1}(u)\Big)}$ est continue sur $[\alpha,\beta]$ (puisqu'il n'y a pas de problème en x_0). On peut alors conclure grâce au premier cas, en prenant h comme "nouveau" f et $h(0) = f(x_0)\sqrt{\dfrac{2}{\varphi''(x_0)}}$.

■

Application 0.1

$$\Gamma(t+1) \underset{t\to\infty}{\sim} t^t e^{-t}\sqrt{2\pi t}.$$

On effectue le changement de variable $x = tu$

$$\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} x^t e^{-x}\mathrm{d}x = t^{t+1}\int_0^{+\infty} u^t e^{-tu}\mathrm{d}u = t^{t+1}\int_0^{+\infty} e^{t\ln(u)-tu}\mathrm{d}u.$$

On applique alors la méthode de Laplace avec $\varphi(u) = u - \ln(u)$. On a $\varphi'(u) = 1 - \frac{1}{u}$ donc l'unique point critique de φ est 1. De plus $\varphi''(1) = 1 > 0$ donc 1 est bien un minimum. On en déduit

$$\Gamma(t+1) \underset{t\to\infty}{\sim} t^{t+1}\sqrt{\frac{2\pi}{t}}e^{-t} = t^t e^{-t}\sqrt{2\pi t}.$$

Densité des polynômes orthogonaux

Théorème . *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\rho : I \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction mesurable telle qu'il existe $a > 0$ vérifiant $\int_I e^{a|x|}\rho(x)\mathrm{d}x < \infty$. Alors l'unique famille des polynômes orthogonaux $(P_n)_n$ vérifiant*

$$\forall n \geq 1, deg(P_n) = n$$

forme une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.

Remarque — Une telle famille existe. Pour une telle fonction ρ, on peut définir $L^2(I, \rho)$ comme les fonctions f telles que $\int_I |f(x)|^2\rho(x)\mathrm{d}x < \infty$, que l'on munit du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_I f(x)g(x)\rho(x)\mathrm{d}x$. Si elle vérifie $\forall n \geq 0$, $\int_I |x|^n\rho(x)\mathrm{d}x < \infty$, alors $L^2(I, \rho)$ contient les polynômes. Il va ainsi exister une unique famille de polynômes orthogonaux comme souhaitée, et on peut l'obtenir en appliquant la méthode de Gram-Schmidt à la base $(x^n)_n$.

Démonstration

La famille $(P_n)_n$ étant orthonormale, il suffit de montrer que l'espace vectoriel engendré par cette famille est dense dans $H := L^2(I, \rho)$. Pour cela, on montre que son orthogonal est l'espace vectoriel nul. Or, par construction, on a $\mathrm{Vect}(P_n\ ;\ n \geq 0) = \mathrm{Vect}(g_n : x \mapsto x^n\ ;\ n \geq 0)$, il suffit donc de montrer pour $f \in H$

$$\forall n \geq 0, \langle f, g_n\rangle = 0 \implies f = 0.$$

On suppose f comme telle, et on pose $\varphi = f\rho\mathbb{1}_I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. En utilisant l'inégalité

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, \quad ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2},$$

on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\varphi(x)| \leq \frac{1 + |f(x)|^2}{2}\rho(x)\mathbb{1}_I(x).$$

Cette dernière fonction est intégrable sur $\mathbb{R}$ car ρ et $f^2\rho$ sont intégrables sur I, donc $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$.

Sa transformée de Fourier existe, elle est donnée par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\varphi}(\xi) = \int_I f(x)\rho(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x.$$

On va la prolonger en une fonction holomorphe sur $B := \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |\mathrm{Im}(z)| < \frac{a}{2}\}$. Pour $z \in B$ et $x \in I$, on pose $g(z, x) := e^{-ixz}f(x)\rho(x)$. On a

$$|g(z, x)| = e^{\mathrm{Im}(z)x}|f(x)|\rho(x) \leq e^{\frac{a}{2}|x|}|f(x)|\rho(x) \leq \frac{e^{a|x|} + |f(x)|^2}{2}\rho(x),$$

donc $F : z \mapsto \int_I g(z, x)\mathrm{d}x$ est bien définie sur B. On a

- Pour tout $z \in B$, $x \mapsto g(z, x)$ est mesurable.
- Pour tout $x \in I$, $z \mapsto g(z, x)$ est holomorphe.
- On a $\forall z \in B, \forall x \in I, |g(z, x)| \leq \dfrac{e^{a|x|} + |f(x)|^2}{2}\rho(x)$ qui ne dépend pas de z et qui est intégrable sur I.

D'après le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale, F est holomorphe sur B et prolonge $\widehat{\varphi}$. De plus, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$F^{(n)}(0) = (-i)^n \int_I x^n f(x)\rho(x)e^0\mathrm{d}x = (-i)^n\langle g_n, f\rangle = 0.$$

Or F étant holomorphe, elle est développable en série entière au voisinage de 0, et y est donc nulle. B étant connexe, on en déduit que F est identiquement nulle sur B, et ainsi $\widehat{\varphi}$ l'est sur $\mathbb{R}$. L'injectivité de la transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$ permet de conclure.

■