

Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, I intervalle de \mathbb{R}

I- Méthodes directes

1) Calcul de primitives

Théor 1: Toute fonction $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue admet des primitives et pour toute primitive F de f , on a $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Exemple 2: Cela permet de calculer de nombreux intégrales.

- Si $\alpha \neq -1$, on a $\int_a^b x^\alpha dx = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ (ANNEXE: quelques primitives usuelles)
- $\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln(b) - \ln(a)$, $a, b \in]0, +\infty[$.
- $\int_a^b \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan(b) - \arctan(a)$.

Exemple 3: On peut utiliser la décomposition en éléments simples de fractions rationnelles: une primitive de $\frac{1}{x(x^2+1)}$ est $\ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x^2+1|$.

Exemple 4: (linéarisation cos et sin) Soit $f(t) = \sin^m t \cos^n t$ où $m, n \in \mathbb{N}$, il y a deux cas: - si n ou m impair de la forme? on a $f(x) = \sin^m(x) (1 - \sin^2(x))^p \cos(x)$ et on fait un changement de variable. - si m et n sont pairs, on peut linéariser $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$.

$$2x: \cos^4(x) = \frac{\cos(4x)}{8} + \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{3}{8}$$

2) Intégration par partie

Théor 5: Soit $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 alors $\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$.

Ex 6: (Intégrale de Wallis): Pour $n \in \mathbb{N}$ $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ on a $I_n \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Ex 7: La fonction gamma $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ donne $\Gamma(n+1) = n!$

3) Changement de variables

Théor 8: Soit $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ \mathcal{C}^1 et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux telle que $\varphi([a, b]) \subset I$ alors $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du$.

App 9: Soit $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux

- 1) Si f est paire alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$.
- 2) Si f est impaire alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$.

App 10: Soit f continue par morceaux et T -périodique alors

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int^T f(x) dx$$

Exemple 10: Règles de Bigche (voir annexe): $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2(x)}{1+\cos^2 x} dx = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2} - 2 \arctan(\frac{\sqrt{2}}{2})$

Théor 11: Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n et φ un \mathcal{C}^1 difféo de U sur

$\varphi(U)$ telle que φ et son jacobien $J(\varphi) = \det(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j})$ se prolongent continuellement sur U alors $V = \varphi(U)$ est un compact mesurable et pour toute fonction continue $f: V \rightarrow \mathbb{R}$, on a $\int_V f(v) dv = \int_U f(\varphi(u)) |J(\varphi)(u)| du$.

App 12: Coordonnées polaires: $\varphi: \mathbb{R}^* \times]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

est de jacobien r . $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$.

Exemple 13: (intégrale de Gauss) On a $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

App 14: Si B_d désigne la boule unité fermée de \mathbb{R}^d pour la norme euclidienne. On pose $\omega_d = \lambda(B_d)$ le volume de la boule unité, on a $\omega_{d+2} = \omega_d \frac{2\pi}{d+2}$, ainsi $\omega_d = \frac{\pi^{d/2}}{(d/2)!}$ si d pair, $\omega_d = \frac{2^d \pi^{d/2}}{d!} (\frac{d-1}{2})!$ si d impair.

4) Théorèmes de Fubini

On considère X, Y deux boleviens de \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m , $X \times Y \subset \mathbb{R}^{n+m}$

Théorème 15: (Fubini-Tonelli) Soit $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable alors les fonctions $x \mapsto \int_Y f \, d\mu$ et $y \mapsto \int_X f \, d\nu$ sont définies pp et mesurables et on a:

$$\iint_{X \times Y} f \, d(\mu \otimes \nu) = \int_Y \int_X f \, d\nu \, d\mu = \int_X \int_Y f \, d\mu \, d\nu$$

Théorème 16 (Fubini-Lebesgue) Si f est de plus intégrable alors les deux fonctions précédentes sont intégrables et on a la même conclusion sur \mathbb{R}

App 17: Soit $f \in L^1$ et $F(x) = \int_0^x f(t) \, dt$ alors $\forall \alpha > 0$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{F(\alpha x) - F(x)}{x} \, dx = \ln(\alpha) \int_0^{+\infty} f(x) \, dx$$

App 18: (IPP sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$): Soit f, g localement intégrables sur \mathbb{R} alors les fonctions: $\forall x \in \mathbb{R}, F: x \mapsto \int_0^x f(t) \, dt$ et $G: x \mapsto \int_0^x g(t) \, dt$ vérifient la formule,

$$\int_0^x f(t)g(t) \, dt = F(x)G(x) - \int_0^x F(t)g(t) \, dt$$

Ex 19: Soit $(a_{p,q})_{p,q \in \mathbb{N}}$ une suite tq $\sum_{p,q} |a_{p,q}| < +\infty$ alors

$$\sum_{p,q} a_{p,q} = \sum_p \left(\sum_q a_{p,q} \right) = \sum_q \left(\sum_p a_{p,q} \right)$$

II. Méthodes indirectes:

1) Par la suite et séries de fonctions

Théorème 20: (convergence monotone) Soit $(f_n)_n$ suite croissante de fonctions mesurables positives alors $\lim \int f_n \, d\mu = \int \lim f_n \, d\mu$ dans \mathbb{R}_+ .

Ex 21: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{-x} \, dx = 1$.

Théorème 22: (convergence dominée) Soit (f_n) suite de fct mesurables tq: i) (f_n) converge vers f ii) $\exists g \in L^1$ tq $\forall n, |f_n| \leq g$ alors

$$\lim \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$$

Ex 23: Soit $\alpha \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^\alpha \, dx = \alpha!$

Théorème 24: Soit (f_n) une suite de fonction mesurable. Si $\forall n, \int f_n > 0$ ou $\sum \int f_n \, d\mu < +\infty$ alors $\sum \int f_n \, d\mu = \int \sum f_n \, d\mu$.

Ex 25: $\int_0^{+\infty} \sum_{n \geq 1} e^{-nx} x^2 \, dx = 2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$

2) Intégrales à paramètres: (A, x, μ) mesurée (E, d)

Théorème 26: (continuité sous l'intégrale): Soit $f: E \times A \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} mesurable

tq 1) pp $t \in A, x \mapsto f(x,t)$ continue 2) $\forall x \in E, t \mapsto f(x,t)$ mesurable

3) $\exists g: A \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable tq $\forall x \in E, pp \, t \in A, |f(x,t)| \leq g(t)$ alors

$F: x \mapsto \int_A f(x,t) \, d\mu(t)$ est continue $\forall x \in E$.

Théorème 27 (différentiabilité sous l'intégrale) Soit $f: I \times A \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} tq

1) pp $t \in A, x \mapsto f(x,t)$ dérivable de dérivée $\partial_x f(x,t)$ 2) $\forall x \in I, f + |f'|$

intégrable et 3) $\exists g: A \rightarrow \mathbb{R}_+$ tq $\forall x \in I, pp \, t \in A, |f'(x,t)| \leq g(t)$ alors

F est dérivable et $F'(x) = \int_A \partial_x f(x,t) \, d\mu(t)$.

Ex 28: $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} e^{itx} \, dt = e^{-x^2/2}$

App 29: la fonction Γ est \mathcal{C}^∞ et $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^n t^{x-1} e^{-t} \, dt$.

Ex 30: (intégrale de Dirichlet): $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt = \frac{\pi}{2}$

Ex 31: pour $x > 0, \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} \, dt = \arctan(x)$.

App 32: (Méthode de Laplace) Soit $I:]a,b[\subset \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ et

$\psi \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$. On suppose 1) $\forall x > 0, \int_a^b e^{t\varphi(x)} |f(x)| \, dx < +\infty$

2) φ' s'annule en un unique $x_0 \in I$ et $\varphi''(x_0) < 0$ 3) $f(x_0) \neq 0$

alors $\int_a^b e^{t\varphi(x)} f(x) \, dx \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{|\varphi''(x_0)|}} e^{t\varphi(x_0)} f(x_0) t^{-1/2}$

3) Par l'analyse complexe

Def 33: Soit $\gamma: I \rightarrow \mathbb{C}$ par morceaux. Soit f continue sur $\text{Im}(\gamma)$

on définit $\int_\gamma f(z) \, dz = \int_I f(\gamma(t)) \gamma'(t) \, dt$.

Def 34: (indice): Si γ est un chemin fermé, $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \text{Im}(\gamma)$, $\text{Ind}_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} \, dz$.

Théorème 35 (de Cauchy) Soit Ω ouvert convexe de \mathbb{C} , γ un chemin fermé de Ω et f holomorphe sur Ω alors $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Prop 36 (formule de Cauchy): Sous les mêmes hypothèses on a:

$$f(z) \text{Ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t) dt}{t-z}$$

Def 37 (Résidu): Soit f méromorphe sur Ω et a un pôle d'ordre m de f . Au voisinage de a f se décompose en série de Laurent $f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k (z-a)^k$. On pose alors $\text{Res}(f, a) = a_{-1}$ le résidu de f en a.

Théorème 38 (des résidus) Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ convexe, a_1, \dots, a_n des points de Ω et f méromorphe tq les a_i soient ses pôles. Soit γ un lacet dans Ω dont l'image ne contient pas les a_i alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res}(f, a_i) \text{Ind}_{\gamma}(a_i)$$

Ex 39: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ $\int_{\mathbb{R}^+} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

App 40: (Formule des compléments) $\forall z \in \mathbb{C}, 0 < \text{Re}(z) < 1$, on a $\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ dev 1

4) Transformation de Fourier

Def 41: Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ on définit sa transformée de Fourier par

$$\mathcal{F}: f \mapsto \hat{f}; t \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x) dx \text{ pour } t \in \mathbb{R}$$

Théorème 42: Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors \hat{f} est continue et tend vers 0 en $+\infty$.

Def 43: Une suite $(p_k)_k \in L^1(\mathbb{R})$ est une approximation de l'unité si elle vérifie: 1) $\forall k, \int_{\mathbb{R}} p_k = 1$, 2) $p_k \geq 0 \forall k$, 3) $\forall \epsilon > 0 \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{|x| > \epsilon} p_k = 0$.

Théorème 44: Soit (p_n) une approximation de l'unité et $f \in L^p(\mathbb{R})$ $p \in [1, +\infty[$ alors $\forall n, f * p_n \in L^p(\mathbb{R})$ et $f * p_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$.

Théorème 45 (inversion de Fourier): Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors $ff \in \mathcal{L}^1$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{ixt} dt = \frac{1}{2\pi} \hat{\hat{f}}(x)$$

dev 2

III - Calculs approchés d'intégrales

1) Méthode de quadrature

Def 46: Soit $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ et $\mathcal{I} = \{\alpha < x_1 < \dots < x_n < \beta\}$ une subdivision de (α, β) . Sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ on choisit l_i points $\xi_{i,j}$ et des poids $w_{i,j}$ tq $\sum_{j=0}^{l_i} w_{i,j} = 1$. On approche alors $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t) dt$ par $(x_{i+1} - x_i) \sum_{j=0}^{l_i} w_{i,j} f(\xi_{i,j})$ et donc $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \approx \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \sum_{j=0}^{l_i} w_{i,j} f(\xi_{i,j})$.

App 47 (voir ANNEXE): Si $l_i = 0 \forall i$ la seule liberté est le choix de ξ_i .

- si $\xi_i = x_i \rightarrow$ méthode des rectangles à droite
- si $\xi_i = x_{i+1} \rightarrow$ méthode des rectangles à gauche
- si $\xi_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \rightarrow$ méthode des points milieux.

Ex 48: $\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx \approx \frac{2}{3} e^{-1} + \frac{4}{3}$

2) Méthode de Monte-Carlo

Théorème 49: Si $E(|X_1|) < +\infty$ et (X_i) des v.a iid alors

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s} E(X_1)$$

Méthode 50: Calcul de $I = \int_0^1 f(x) dx$ via $X = f(U)$ où $U \sim \mathcal{U}(0,1)$. Si $E(|X|) < +\infty$ alors $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow I$ pour (X_i) iid.

Ex 51: $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x^{1/4}} dx$, $Y \sim \mathcal{E}(1)$ de densité $f(x) = e^{-x}$

$X := Y^{1/4}$ possède un moment d'ordre 2 et $E(X^2) = \sqrt{\pi}$.

Quelques primitives usuelles: (2)

Fonction	Primitive	Intervalle de validité
x^α $\alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	ICIR si $\alpha \in \mathbb{N}$ ICIR* ou IR* si $\alpha \in \mathbb{Z}$ ICIR* si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + C$	ICIR* ou IR*.
$\cos(x)$ $\sin(x)$	$\sin(x) + C$ $-\cos(x) + C$	ICIR
$\tan(x)$	$-\ln \cos x + C$	IC $]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}[$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\text{Arctan}(x) + C$	ICIR
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$	ICIR $]-1; 1[$
$-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\text{arccos}(x) + C$	ICIR $]\pm 1; 1[$

Règles de Bôcher (10)

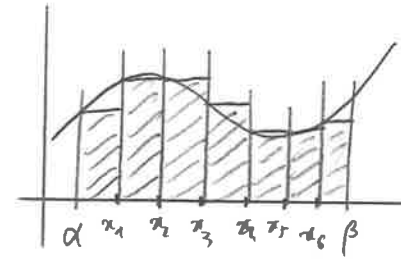
On veut intégrer $\int_I f(x) dx$ où f est une fraction rationnelle en \cos et \sin .

Soit $w(x) = f(x) dx$.

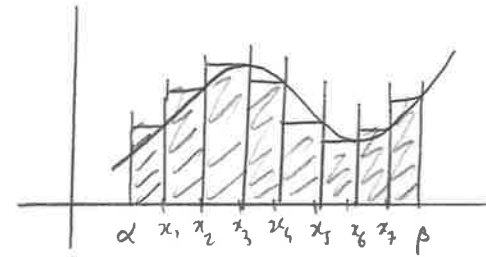
- Si $w(-x) = w(x)$ on pose $t = \cos x$
- Si $w(\pi - x) = w(x)$, on pose $t = \sin x$
- Si $w(\pi + x) = w(x)$, on pose $t = \tan x$.

Méthodes de quadratures

• rectangles à gauche:



• rectangle à droite:



• points milieux:

