Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables

Dans cette leçon, $(X,\mathcal{A},\mu)$ désigne un espace mesuré.

I) Intégrale de Lebesgue et théorèmes d'inversion

1°) Intégrale sur un espace mesuré BRI p119-131

• **Définition 1** : Soit $\mathcal{E}_+$ l'ensemble des fonctions étagées positives sur $(X,\mathcal{A},\mu)$. L'intégrale de $f=\sum_{\alpha\in f(X)} \alpha \mathbb{1}_{\{f=\alpha\}} \in \mathcal{E}_+$ par rapport à la mesure μ est définie par : $\int_X f\,d\mu \hat{=} \sum_{\alpha\in f(X)} \alpha\,\mu(\{f=\alpha\})\in \overline{\mathbb{R}}_+$.

• **Exemples 2** : - Pour δ_α la mesure de Dirac en $\alpha\in X$ et $f\in\mathcal{E}_+$, $\int_X f\,d\delta_\alpha = f(\alpha)$.
- Pour m la mesure de comptage sur $(X,\mathcal{P}(X))$ et $f\in\mathcal{E}_+$, $\int_X f\,dm = \sum_{\alpha\in f(X)} \alpha\,\mathrm{Card}(\{f=\alpha\})$.
- Pour λ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, $\int_{[0,1]^d} 1\,d\lambda = \lambda([0,1]^d)=1$.

• **Proposition 3** : Pour $f,g\in\mathcal{E}_+$, $\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu$ (additivité) ; $f\le g \Rightarrow \int_X f\,d\mu \le \int_X g\,d\mu$ (croissance), $\forall a\in\mathbb{R}_+$, $\int_X af\,d\mu = a\int_X f\,d\mu$ (positive homogénéité). $f=g$ presque partout $\Rightarrow \int_X f\,d\mu = \int_X g\,d\mu$.

• **Définition 4** : Soit $\mathcal{F}_+$ l'ensemble des fonctions mesurables positives sur $(X,\mathcal{A})$. L'intégrale de $f\in\mathcal{F}_+$ par rapport à μ est $\int_X f\,d\mu \hat{=} \sup\{\int_X \varphi\,d\mu \,;\, \varphi\le f \text{ et } \varphi\in\mathcal{E}_+\}$. On dit alors que f est μ-intégrable si $\int_X f\,d\mu<+\infty$.

• **Remarque 5** : Les propriétés de la proposition 3 restent valables pour $f,g\in\mathcal{F}_+$ mais nécessitent le théorème de convergence monotone (sauf pour la croissance).

• **Définitions 6** : - Une fonction $f:(X,\mathcal{A})\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable est μ-intégrable si $|f|$ l'est. Dans ce cas, son intégrale est définie par $\int_X f\,d\mu \hat{=} \int_X f_+\,d\mu - \int_X f_-\,d\mu$ où $f_+ \hat{=} \max(f,0)$ et $f_-=\max(-f,0)$ sont respectivement les parties positive et négative de f.
- On note $\mathcal{L}^1(\mu) \hat{=} \{f:(X,\mathcal{A})\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable, $\int_X |f|\,d\mu <+\infty\}$.
- On note $L^1(\mu) \hat{=} \mathcal{L}^1(\mu)/\sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence définie par : $f\sim g \Leftrightarrow f-g=0$ presque partout. - On note $L^1(X)$ lorsque $\lambda=\mu$ pour préciser l'ensemble.

• **Exemples 7** : - $x\in[1,+\infty[\,\mapsto \frac{1}{x^2}\in L^1([1,+\infty[)$; $x\mapsto\sqrt{x}\in L^1([0,1])$.

• **Proposition 8** : - Pour $f\in\mathcal{F}_+$, $\forall A>0$, $\mu(\{f\ge A\})\le \frac{1}{A}\int_X f\,d\mu$ (inégalité de Markov).
- Pour $f\in\mathcal{L}^1(\mu)$, $|\int_X f\,d\mu|\le\int_X|f|\,d\mu$ (inégalité triangulaire).
- Pour $f,g\in\mathcal{L}^1(\mu)$, $f=g$ presque partout $\Rightarrow \int_X f\,d\mu = \int_X g\,d\mu$.

• **Remarque 9** : Toute fonction intégrable au sens de Riemann l'est au sens de Lebesgue : $\int_{[a,b]} f\,d\lambda$ et $\int_a^b f(x)\,dx$ désignent la même intégrale (lorsqu'elle est bien définie). En revanche, $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ est intégrable au sens de Lebesgue mais pas au sens de Riemann.

2°) Théorèmes d'inversion BRI p124-137 QUE p312

• **Théorème 10** : théorème de convergence monotone (de Beppo-Levi) : Si (f_n) est une suite croissante de fonctions de $\mathcal{F}_+$ alors $f\hat{=}\lim_{n\to+\infty} f_n\in\mathcal{F}_+$ et $\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to+\infty}\int_X f_n\,d\mu$.

• **Remarque 11** : il n'y a pas de version décroissante : pour $A_n \hat{=} [n,+\infty[\,\subset\mathbb{R}$, on a : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\mu(A_n)=+\infty$ mais $\mu(\bigcap_{n=0}^{+\infty}A_n)=\mu(\emptyset)=0$.

• **Corollaire 12** : Si $(f_n)\in\mathcal{F}_+^{\mathbb{N}}$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty}\int_X f_n\,d\mu = \int_X \sum_{n=0}^{+\infty} f_n\,d\mu$ (dans $[0,+\infty]$).

• **Théorème 13** : lemme de Fatou : Si $(f_n)\in\mathcal{F}_+^{\mathbb{N}}$ alors $\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n\in\mathcal{F}_+$ et $\int_X \underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n\,d\mu \le \underline{\lim}_{n\to+\infty}\int_X f_n\,d\mu$.

• **Remarque 14** : L'inégalité précédente peut être stricte : pour $A\subset X$ mesurable telle que $\mu(A)>0$, $\mu(A^c)>0$ et $f_n(x)=\begin{cases}\mathbb{1}_A(x) & \text{si } n \text{ est pair}\\ \mathbb{1}_{A^c}(x) & \text{sinon}\end{cases}$, $\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n = 0$ et $\underline{\lim}_{n\to+\infty}\int_X f_n\,d\mu = \min(\mu(A),\mu(A^c))>0$.

• **Théorème 15** : théorème de convergence dominée : si $(f_n)\in\mathcal{F}_+^{\mathbb{N}}$ avec $f_n\xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ simplement (presque partout) et s'il existe $g:X\to\mathbb{R}_+$ μ-intégrable telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour presque tout $x\in X$, $|f_n(x)|\le g(x)$ alors $\int_X|f_n-f|\,d\mu\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$. En particulier, $\lim_{n\to+\infty}\int_X f_n\,d\mu=\int_X f\,d\mu$.

• **Contre-exemple 16** : dans $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, pour $f_n=\mathbb{1}_{[n,n+1]}$; $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ mais on a $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1\ne0$. Il manque l'hypothèse de domination ($\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{[n,n+1]} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}\notin L^1(\mathbb{R}_+)$).

• **Contre-exemple 17** : dans $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, pour $f_n = n\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}$; $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ mais $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \frac{n}{n}=1$. Il manque aussi l'hypothèse de domination ($\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = \begin{cases}+\infty & \text{si } x=0\\ \sum_{k=1}^{+\infty} k\,\mathbb{1}_{]\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}[}(x) & \text{sinon}\end{cases} \notin L^1(\mathbb{R})$).

• **Exemple 18** : La suite $I_n(\alpha)\hat{=}\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x}\,dx$ converge si, et seulement si, $\alpha>1$.

• **Applications 19** : - théorème de continuité sous l'intégrale : pour I et J intervalles (de $\mathbb{R}$), si $f:I\times J\to\mathbb{C}$ est telle que : $\forall x\in I$, $f(x,\cdot)$ est mesurable ; pour presque tout $t\in J$, $f(\cdot,t)$ est continue et s'il existe $g\in L^1(J)$ indépendante de x telle que $|f(x,t)|\le g(t)$ pour tout $x\in I$ et presque tout $t\in J$ alors, pour tout $x\in I$, $f(x,\cdot)\in L^1(J)$ et $F:x\in I\mapsto\int_J f(x,t)\,dt$ est une application continue sur I.
- théorème d'holomorphie sous l'intégrale : pour $\Omega\subset\mathbb{C}$ ouvert et I intervalle (de $\mathbb{R}$), si $f:\Omega\times I\to\mathbb{C}$ est telle que : $\forall z\in\Omega$, $f(z,\cdot)\in L^1(I)$; pour presque tout $t\in I$, $f(\cdot,t)$ est holomorphe sur Ω et s'il existe $g\in L^1(I)$ indépendante de z telle que $|f(z,t)|\le g(t)$ pour tout $t\in I$ et presque tout $z\in\Omega$ alors la fonction $F:z\in\Omega\mapsto\int_I f(z,t)\,dt$ est holomorphe sur Ω avec : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall z\in\Omega$, $F^{(n)}(z)=\int_I\frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z,t)\,dt$.

• **Exemple 20** : $\Gamma: z\in\{z\in\mathbb{C}, \mathrm{Re}(z)>0\}\mapsto\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{z-1}\,dt$ est holomorphe.

• **Application 21** : Si f est une fonction presque partout dérivable sur $[0,1]$, de dérivée f' bornée alors $\int_0^1 f'(x)\,dx = f(1)-f(0)$ (f est l'intégrale de sa dérivée).

• **Application 22** : Pour (f_n) une suite de fonctions mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$, si $\sum_{n=0}^{+\infty}\int_X|f_n|\,d\mu<+\infty$

alors les fonctions f_n et $\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n|$ sont μ-intégrables avec $\int_X \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_X f_n \, d\mu$.

• <u>Application 23</u> : <u>lemme de Borel-Cantelli</u> : pour $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) < +\infty \Rightarrow \mu(\varlimsup_{n\to+\infty} A_n) = 0$.

• <u>Corollaire 24</u> : Si (f_n) est une suite de fonctions mesurables sur X telle que (f_n) converge simplement vers f presque partout et la suite $\left(\int_X |f_n| \, d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors $\int_X \big||f_n| - |f_n - f| - |f|\big| \, d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

• <u>Remarque 25</u> : En particulier, si $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ presque partout et $\int_X |f_n| \, d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_X |f| \, d\mu$ alors $\int_X |f_n - f| \, d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On obtient la convergence de (f_n) vers f dans $L^1(\mu)$.

• <u>Théorème 26</u> : <u>théorème de Fubini-Tonelli</u> : Si $f : (X\times Y, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ est une fonction mesurable, μ est une mesure σ-finie sur $(X, \mathcal{A})$ et ν est une mesure σ-finie sur $(Y, \mathcal{B})$ alors $x \in X \mapsto \int_Y f(x,y)\nu(dy)$ et $y \in Y \mapsto \int_X f(x,y)\mu(dx)$ sont mesurables avec $\int_X\left(\int_Y f(x,y)\nu(dy)\right)\mu(dx) = \int_Y\left(\int_X f(x,y)\mu(dx)\right)\nu(dy) = \int_{X\times Y} f \, d(\mu\otimes\nu)$.

• <u>Théorème 27</u> : <u>théorème de Fubini-Lebesgue</u> : Avec les mêmes notations, si $f \in \mathcal{L}^1(\mu\otimes\nu)$ alors les applications précédentes sont intégrables et on a les mêmes égalités.

• <u>Exemple 28</u> : pour $X = Y = \mathbb{N}$ et $\mu = \nu = m$ la mesure de comptage, $\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,p} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p}$ dès que $\sum_p \sum_{n=0}^{+\infty} |a_{n,p}| < +\infty$ ou $a_{n,p} \geq 0 \ \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$.

• <u>Contre-exemple 29</u> : $f : (x,y) \in \mathbb{R}_+ \times [0,1] \mapsto 2e^{-2xy} - e^{-xy}$: $0 \neq \ln(2)$ (f n'est pas intégrable).

II) Les espaces L^p

1°) Définitions BRI p163

• <u>Définition 30</u> : Pour $p \in]0, +\infty[$, on définit $\mathcal{L}^p(\mu) \triangleq \{f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable, $\int_X |f|^p \, d\mu < +\infty\}$.

• <u>Exemple 31</u> : Pour m la mesure de comptage, $\mathcal{L}^p(m) = \ell^p(\mathbb{N}) \triangleq \{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^p < +\infty\}$.

• <u>Proposition 32</u> : $\mathcal{L}^p(\mu)$ est un espace vectoriel.

• <u>Proposition 33</u> : Si $\mu(X) < +\infty$ et $0 < p \leq q$ alors $\mathcal{L}^q(\mu) \subset \mathcal{L}^p(\mu)$.

• <u>Remarque 34</u> : Il n'y a pas d'inclusion entre $\mathcal{L}^1(\lambda)$ et $\mathcal{L}^2(\lambda)$ sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} \mathbb{1}_{]0,1]}(x) \in \mathcal{L}^1(\lambda)\setminus\mathcal{L}^2(\lambda)$ et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \in \mathcal{L}^2(\lambda)\setminus\mathcal{L}^1(\lambda)$.

• <u>Remarque 35</u> : Pour $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, on note $\|f\|_p \triangleq \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$. $\|\cdot\|_p$ vérifie les propriétés d'une norme sur $\mathcal{L}^p(\mu)$ sauf l'homogénéité : on a seulement $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = \tilde{0}$ presque partout.

• <u>Définition 36</u> : On note $L^p(\mu) \triangleq \mathcal{L}^p(\mu)/\sim$ où $\sim$ a été définie en définitions 6.

• <u>Définitions 37</u> : - Pour $p = +\infty$, on définit $\mathcal{L}^\infty(\mu) \triangleq \{f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable, $\exists M \geq 0, \mu(\{|f| \geq M\}) = 0\}$.
- On définit aussi $L^\infty(\mu) \triangleq \mathcal{L}^\infty(\mu)/\sim$ et pour $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$, $\|f\|_\infty \triangleq \inf\{M \geq 0, \mu(\{|f| \geq M\}) = 0\}$.

• <u>Proposition 38</u> : Pour $p \in [1, +\infty]$, $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé.

• <u>Remarque 39</u> : Pour $f(x) \triangleq \begin{cases} n \text{ si } x = n \in \mathbb{N}^* \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$, $|f| \leq 1$ sauf sur $\mathbb{N}^*$: $\mu(\{|f| \leq 1\}) = \mu(\mathbb{N}^*) = 0$ pour $\mu = \lambda$.

• <u>Remarque 40</u> : Dans les définitions de $L^1(\mu)$, $L^p(\mu)$ et $L^\infty(\mu)$, on peut aussi prendre des fonctions mesurables à valeurs complexes (cela ne change pas l'étude théorique faite ici).

2°) Inégalités de convexité et complétude des espaces L^p BRI p164-172 BEC p110-140

• <u>Théorème 41</u> : <u>inégalité de Jensen</u> : Pour I un intervalle, si μ est une mesure de probabilités, $\varphi : I \to \mathbb{R}_+$ est convexe et $f : (X, \mathcal{A}) \to (I, \mathcal{B}(I))$ est intégrable alors $\int_X f \, d\mu \in I$ et $\varphi\left(\int_X f \, d\mu\right) \leq \int_E \varphi(f) \, d\mu$.

• <u>Exemples 42</u> : - Pour μ mesure de probabilité, $\varphi = \exp$ sur $\mathbb{R}$ donne $\exp\left(\int_X f \, d\mu\right) \leq \int_X e^f \, d\mu$.
- Pour μ mesure de probabilité et $\varphi : x \in \mathbb{R} \mapsto |x|^p$ avec $p \geq 1$, $\left(\int_X |f| \, d\mu\right)^p \leq \int_X |f|^p \, d\mu$.

• <u>Théorème 43</u> : <u>inégalité de Hölder</u> : Si $f \in L^p(\mu)$ et $g \in L^q(\mu)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $(p,q) \in]1, +\infty[^2$ alors $fg \in L^1(\mu)$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$. De plus, il y a égalité si, et seulement si, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2$ non nul tel que $\alpha|f|^p = \beta|g|^q$ presque partout.

• <u>Remarque 44</u> : Cette inégalité est une généralisation de celle de Cauchy-Schwarz qui correspond au cas où $p = q = 2$.

• <u>Remarque 45</u> : Dans le cas où $\|f\|_p$ ou $\|g\|_q = +\infty$, l'inégalité de Hölder reste vraie mais pas le cas d'égalité : pour $f(x) \triangleq x^{-3/4} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$ et $g(x) \triangleq x^{-1/4} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$ définies sur $\mathbb{R}$ avec la mesure de Lebesgue, $\|fg\|_1 = \|g\|_2 = +\infty$, $0 < \|f\|_2 < +\infty$: il y a égalité mais f^2 et g^2 ne sont pas proportionnelles.

• <u>Théorème 46</u> : <u>inégalité de Minkowski</u> : Pour $p \in [1, +\infty[$, $\forall (f,g) \in \mathcal{L}^p(\mu)^2$, $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. De plus, pour $p = 1$, il y a égalité si, et seulement si, $f\bar{g} \geq 0$ presque partout ; pour $p > 1$, il y a égalité si, et seulement si, $f = \tilde{0}$ presque partout ou $g = \alpha f$ presque partout où $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

• <u>Remarque 47</u> : Les inégalités de Hölder et Minkowski ont des versions inverses : pour $p \in]0, 1[$ et q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, si f et g sont fonctions mesurables à valeurs strictement positives alors $\int_X fg \, d\mu \geq \left(\int_X f^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$ et $\left(\int_X (f+g)^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\int_X f^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$.

• <u>Lemme 48</u> : <u>inégalité de Minkowski généralisée</u> : Si $(f_n) \in \mathcal{F}_+^{\mathbb{N}}$ alors, pour tout $p \in [1, +\infty[$, $\left\|\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\right\|_p \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n\|_p$ $(\leq +\infty)$.

• <u>Théorème 49</u> : <u>théorème de Riesz-Fisher</u> : - Pour tout $p \in [1, +\infty[$, $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ est complet.
- Pour $(f_n) \in (L^p(\mu))^{\mathbb{N}}$ et $f \in L^p(\mu)$ où $p \in [1, +\infty[$, si $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_p} f$ alors il existe une suite extraite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $g \in L^p(\mu)$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_{\varphi(n)}| \leq g$ presque partout et $f_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ presque partout.

• <u>Remarque 50</u> : Il n'y a pas de lien d'implication entre convergence L^p et convergence presque partout : par exemple, (f_n) définie par $f_{2^n+k} \triangleq \mathbb{1}_{[\frac{k}{2^n}; \frac{k+1}{2^n}[}$, $\|f_n\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ mais $\forall x \in [0, 1[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_{2^n + k_n^x}(x) = 1$ où $\frac{k_n^x}{2^n} \leq x < \frac{k_n^x + 1}{2^n}$.

• <u>Définition 51</u> : Pour I un intervalle, on appelle fonction poids toute application $w : I \to \mathbb{R}_+^*$ mesurable telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \, dx < +\infty$.

BRI p211 VCSp34 OUV p87

- <u>Définition 52</u> : Pour I un intervalle et w une fonction poids sur I, on définit $L^2(I,w)$ comme l'ensemble des fonctions mesurables f telles que $\int_I |f|^2 w < +\infty$. On munit cet espace du produit scalaire $\langle \cdot,\cdot \rangle_w$ donné par : $\forall f,g \in L^2(I,w), \langle f,g\rangle_w \hat{=} \int_I fg\,w$ et on note $\|\cdot\|_w$ la norme associée.

DÉVELOPPEMENT 1

- <u>Théorème 53</u> : Soit I un intervalle. Si w est une fonction poids sur I telle qu'il existe un $\alpha > 0$ vérifiant $\int_I e^{\alpha|x|} w(x)\,dx < +\infty$ alors l'unique famille échelonnée en degrés de polynômes orthogonaux associés à $\langle \cdot,\cdot \rangle_w$ forme une base hilbertienne de $L^2(I,w)$.
- <u>Remarque 54</u> : L'hypothèse est bien nécessaire : le résultat est faux pour $I =]0,+\infty[$ et $w(x) = x^{-\ln(x)}$.

III) <u>Résultats de densité et applications en probabilités</u>

1°) <u>Densité dans les espaces L^p où $p < +\infty$</u>

BRI p175-297

- <u>Théorème 55</u> : Pour tout $p \in [1,+\infty[$, l'ensemble des fonctions étagées intégrables est dense dans $L^p(\mu)$.
- <u>Remarque 56</u> : Pour φ étagée, $\varphi \in L^p(\mu) \Leftrightarrow \mu(\{\varphi \neq 0\}) < +\infty$.
- <u>Lemme 57</u> : Pour $\mathcal{C} \subset \mathcal{D} \subset L^p(\mu)$, si $\mathcal{C}$ est dense dans $\mathcal{D}$ pour $\|\cdot\|_p$ et $\mathcal{D}$ est dense dans $L^p(\mu)$ pour $\|\cdot\|_p$ alors $L^p(\mu)$ admet $\mathcal{C}$ pour partie dense (pour $\|\cdot\|_p$).
- <u>Théorème 58</u> : – L'ensemble des fonctions en escalier à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R})$.
  – L'ensemble des fonctions lipschitziennes à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R})$.
  – L'ensemble $\mathcal{C}^0_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R})$.
- <u>Remarque 59</u> : Cela reste vrai sur $\mathbb{R}^d$ pour $d \in \mathbb{N}^*$.
- <u>Définition 60</u> : Pour $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ avec $(p,q) \in [1,+\infty]^2$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on définit la convolée de f et g par $f*g : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\,dy$.
- <u>Proposition 61</u> : Avec les mêmes notations, $f*g$ est bien définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}^d$ avec : $\forall x \in \mathbb{R}^d, \ |(f*g)(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_q$
- <u>Remarque 62</u> : Si de plus $(p,q) \in]1,+\infty[^2$ alors $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} (f*g)(x) = 0$.
- <u>Corollaire 63</u> : Si $f,g \in \mathcal{C}^0_c(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ alors $f*g \in \mathcal{C}^0_c(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$.
- <u>Théorème 64</u> : Pour $p \in [1,+\infty[$, $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$: pour tous $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ telle que $\|f - \varphi_\varepsilon\|_p \leq \varepsilon$.
- <u>Remarque 65</u> : Ce résultat de densité s'obtient à partir du produit de convolution par une suite régularisante telle que $(\chi_n)_n$ définie par $\chi_n(x) \hat{=} \chi(nx)n^d$ avec $\chi(x) = \frac{\varphi(x)}{\int_{\mathbb{R}^d}\varphi}$ et $\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{1-\|x\|^2}} & \text{si } \|x\| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

2°) <u>Applications en probabilités : théorème de Radon-Nikodym et convergence de variables aléatoires</u>

- <u>Proposition 66</u> : Pour $f \in \mathcal{F}_+$, $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ définie par : $\forall A \in \mathcal{A}, \nu(A) \hat{=} \int_A f\,d\mu$ est une mesure sur $\mathcal{A}$. De plus, ν est une mesure finie si, et seulement si, $f \in L^1(\mu)$.
- <u>Définition 67</u> : Cette fonction f est alors appelée densité de Radon-Nikodym de ν par rapport à μ.
- <u>Remarque 68</u> : ν est absolument continue par rapport à μ : $\forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$.

DÉVELOPPEMENT 2

- <u>Théorème 69</u> : <u>théorème de Radon-Nikodym</u> : pour μ et ν deux mesures σ-finies sur $(X,\mathcal{A})$, ν est absolument continue par rapport à μ si, et seulement si, il existe $f \in L^1(\mu)$ à valeurs positives telle que : $\forall A \in \mathcal{A}, \nu(A) = \int_A f\,d\mu$.
- <u>Remarque 70</u> : Dans ce cas, une telle fonction $f \in L^1(\mu)$ est unique.
- <u>Contre-exemple 71</u> : $\lambda \ll m$ (λ est absolument continue par rapport à m) mais λ n'admet pas de densité par rapport à m.
- <u>Application 72</u> : Définition de la densité d'une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{R}$: c'est une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ positive telle que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$ et : $\forall A \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(Z \in A) = \int_A f(x)\,dx$.
- <u>Exemples 73</u> : – La loi exponentielle $\mathcal{E}(a)$ où $a > 0$ admet pour densité $f(x) \hat{=} a e^{-ax} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$.
  – La loi normale $\mathcal{N}(a,\sigma^2)$ où $a \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ admet pour densité $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$.
- <u>Application 74</u> : <u>loi forte des grands nombres</u> : Si (X_n) est une suite de variables aléatoires intégrables, indépendantes et identiquement distribuées alors : $\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}\left(\lim\limits_{n \to +\infty} \left\{\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mathbb{E}(X_1)\right| > \varepsilon\right\}\right) = 0$: la suite $\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers l'espérance commune des X_i.
- <u>Définitions 75</u> : – Pour $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espace probabilisé, on définit L^p l'ensemble des variables aléatoires X telles que $\mathbb{E}(|X|^p) < +\infty$ et $\|X\|_{L^p} \hat{=} \mathbb{E}(|X|^p)^{\frac{1}{p}}$ pour $X \in L^p$. – Soit $(X_n) \in (L^p)^{\mathbb{N}}$ et soit $X \in L^p$. On dit que (X_n) converge dans L^p vers X si $\|X_n - X\|_{L^p} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. On note $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{L^p} X$ dans ce cas.
- <u>Définition 76</u> : Une suite (X_n) de variables aléatoires donnée converge en probabilité vers une variable aléatoire X si : $\forall \varepsilon > 0, \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$. On note $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}} X$ dans ce cas.
- <u>Proposition 77</u> : Pour $(X_n) \in (L^p)^{\mathbb{N}}$ et $X \in L^p$, si $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{L^p} X$ alors $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}} X$.
- <u>Remarque 78</u> : La réciproque est fausse en général : pour X_n de loi $\frac{1}{n}\delta_{n^2} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\delta_0$ (où $\delta_\cdot$ est la loi de Dirac), $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}} 0$ mais (X_n) ne converge pas dans L^1.
- <u>Définition 79</u> : Une suite (X_n) est uniformément intégrable si : $\lim\limits_{c \to +\infty} \sup\limits_{n \geq 1} \mathbb{E}(|X_n| \mathbb{1}_{\{|X_n| > c\}}) = 0$.
- <u>Théorème 80</u> : Soit $(X_n) \in (L^p)^{\mathbb{N}}$ (toujours avec $p \geq 1$).
  (X_n) converge dans L^p $\Leftrightarrow$ (X_n) est de Cauchy dans L^p : $\lim\limits_{m,n \to +\infty} \mathbb{E}(|X_m - X_n|^p) = 0$
  (<u>théorème de Vitali</u>) $\Leftrightarrow$ $(|X_n|^p)_n$ est uniformément intégrable et il existe $X \in L^p$ telle que $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{L^p} X$.
- <u>Remarque 81</u> : (X_n) est uniformément intégrable $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall A \in \mathcal{F} \text{ avec } \mathbb{P}(A) < \eta, \forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(|X_n| \mathbb{1}_A) < \varepsilon \\ \text{et } \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_n|) < +\infty \end{cases}$.

Références :

BRI : Marc BRIANE et Gilles PAGÈS, Théorie de l'intégration (8ème édition)

QUÉ : Hervé QUEFFÉLEC et Claude ZUILY, Analyse pour l'agrégation (5ème édition)

BEC : Vincent BECK, Jérôme MALICK et Gabriel PEYRÉ, Objectif agrégation (2ème édition)

VOS : Lioudmila VOSTRIKOVA, Piotr GRACZYK et Tomasz JAKUBOWSKI, Cours de probabilités

OUV : Jean-Yves OUVRARD, Probabilités 2

Annexe : Liens entre les différents modes de convergence en probabilités