Soit $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré. On munit $\mathbb{R}^d$ de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, dont la construction est supposée connue.
Soit $p\in[1,+\infty]$, on note $p'\in[1,+\infty]$ l'exposant conjugué de p qui vérifie $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.

I - Théorie générale de l'intégration.

1- Fonctions étagées et fonctions intégrables.

Définition 1: Une fonction $f: X\to\mathbb{K}$ est dite mesurable si $\forall \beta\in\mathcal{B}(\mathbb{K})$, $f^{-1}(\beta)\in\mathcal{A}$.

Définition 2: Une fonction $f: X\to\mathbb{K}$ est dite étagée si elle est mesurable et si elle prend un nombre fini de valeurs. On note $\mathcal{E}^+$ l'ensemble des fonctions étagées.

Remarque 3: Une telle fonction a une écriture canonique sous la forme $f=\sum_{\alpha\in Im(f)}\alpha\mathbb{1}_{\{f=\alpha\}}$

Définition 4: On définit l'intégrale d'une fonction étagée positive de la manière suivante:
$$\int_X f(x)\,d\mu(x)=\sum_{\alpha\in Im(f)}\alpha\,\mu(\{f=\alpha\})\in\overline{\mathbb{R}^+}$$

Proposition 5: On note $\mathcal{M}^+$ l'ensemble des fonctions mesurables positives. Si $f\in\mathcal{M}^+$, f est limite uniforme d'une suite de fonctions étagées.

Définition 6: Soit $f\in\mathcal{M}^+$. On définit l'intégrale de f par:
$$\int_X f(x)\,d\mu(x)=\sup\left\{\int_X\varphi(x)\,d\mu(x),\ \varphi\in\mathcal{E}^+,\ \varphi\le f\right\}\in\overline{\mathbb{R}^+}$$

Remarque 7: Si $A\in\mathcal{A}$, on peut définir, pour $f\in\mathcal{M}^+$ l'intégrale de f sur A par: $\int_A f(x)\,d\mu(x)=\int_X f(x)\mathbb{1}_A(x)\,d\mu(x)$.

Proposition 8: L'intégrale vérifie les propriétés

1. $\forall\lambda\in\mathbb{K},\forall f\in\mathcal{M}^+$, $\int_X\lambda f(x)\,d\mu(x)=\lambda\int_X f(x)\,d\mu(x)$ (homogénéité)
2. $\forall(f,g)\in{\mathcal{M}^+}^2$, $f\le g$, $\int_X f(x)\,d\mu(x)\le\int_X g(x)\,d\mu(x)$ (croissance)
3. $\forall(f,g)\in{\mathcal{M}^+}^2$, $\int_X(f+g)(x)\,d\mu(x)=\int_X f(x)\,d\mu(x)+\int_X g(x)\,d\mu(x)$ (additivité)

Définition 9: Une fonction mesurable positive f est dite intégrable si $\int_X f(x)\,d\mu(x)<+\infty$. Si f est une fonction mesurable sans signe, f est dite intégrable si $|f|$ est intégrable. On note cet ensemble $\mathcal{L}^1(\mu)$.

Remarque 10: Dans le cas où $X=[a,b]$ est un compact de $\mathbb{R}$, l'intégrale de Riemann correspond exactement à l'intégrale définie ci-dessus, dite intégrale de Lebesgue.

2- Théorèmes de convergence.

Théorème 11 (Beppo Levi): Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions de $\mathcal{M}^+$ convergeant ponctuellement vers f. On a alors
$$\int_X f(x)\,d\mu(x)=\lim_{n\to+\infty}\int_X f_n(x)\,d\mu(x)$$

Exemple 12: La suite $\int_0^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{-4x}\,dx$ converge vers $\frac{1}{1+4}=\frac{1}{5}$.

Théorème 13 (Lemme de Fatou): Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables positives, on a alors:
$$\int_X\liminf_{n\to+\infty}f_n(x)\,d\mu(x)\le\liminf_{n\to+\infty}\int_X f_n(x)\,d\mu(x)$$

Théorème 14 (convergence dominée): Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables telle que:

i) pour μ-presque tout $x\in X$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge lorsque $n\to+\infty$

ii) il existe $g\in\mathcal{L}^1(\mu)$ positive telle que:

$\forall n\in\mathbb{N}$, $|f_n(x)|\le g(x)$ pour μ-presque tout $x\in X$

alors $\lim_{n\to+\infty}\int_X f_n(x)\,d\mu(x)=\int_X\lim_{n\to+\infty}f_n(x)\,d\mu(x)$

Remarque 15: Ce théorème nous donne un théorème de continuité pour les intégrales à paramètres.

Application 16: Pour $f \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, la fonction définie par $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{ix\xi} dx$ est continue sur $\mathbb{R}$.

II - Espaces $L^p(\mu)$.

1- Définitions et exemples.

Définition 17: On définit les espaces $\mathcal{L}^\infty(\mu) = \{f \text{ mesurable} \mid \exists M>0,\ |f| \leq M$ μ presque partout$\}$ et $\mathcal{L}^p(\mu) = \{f \text{ mesurable} \mid \int_X |f|^p(x)\, d\mu(x) < +\infty\}$.

Remarque 18: Dans le cas où μ est la mesure de comptage, on retrouve $\mathcal{L}^p(\mu) = \ell^p(\mathbb{N}) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p < +\infty\}$. Notre étude inclut donc celle des séries convergentes.

Exemple 19: L'application $x \to \frac{1}{\sqrt{x}} \in \mathcal{L}^1(]0,1[) \setminus \mathcal{L}^2(]0,1[)$ et $x \to \frac{1}{x} \in \mathcal{L}^2(]1,+\infty[) \setminus \mathcal{L}^1(]1,+\infty[)$

Définition 20: Soient (f,g) deux fonctions mesurables. On dit qu'elles sont égales presque partout si pour μ presque tout $x \in X$, $f(x) = g(x)$. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des fonctions nulles presque partout.

Remarque 21: f et g sont égales presque partout si et seulement si $f-g$ est nulle presque partout.

Définition 22: On définit l'espace $L^p(\mu) = \mathcal{L}^p(\mu) / \mathcal{N}$.

Proposition 23: Si $\mu(X)$ est finie, alors pour $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, on a
$$L^q(\mu) \subset L^p(\mu)$$

Proposition 24: Dans le cas de la mesure de comptage, on a, pour $1 \leq p \leq q < +\infty$, $\ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^q(\mathbb{N})$

Proposition 25: L'espace $L^p(\mu)$ est un espace vectoriel

Remarque 26: Pour $f \in L^1(\mu)$ positive telle que $\|f\|_1 = 1$, on peut définir une probabilité sur $\mathcal{A}$ par $\forall A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A) = \int_X \mathbb{1}_A(x) f(x)\, d\mu(x)$

Exemple 27: Pour $\mathbb{P}$ mesure de probabilité, si $X \in L^1(\mathbb{P})$, on définit l'espérance de X par $\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$ où $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est l'espace mesurable.

2- Espace de Banach.

Définition 28: Pour $p \in [1,+\infty[$, on définit pour $f \in L^p(\mu)$,
$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p(x)\, d\mu(x)\right)^{1/p}$ et si $p = +\infty$, on note $\|f\|_\infty = \inf\{M>0 \mid |f| < M$ μ presque partout$\}$.

Théorème 29 (inégalité de Hölder): Si $f \in L^p(\mu)$ et $g \in L^{p'}(\mu)$ alors on a
$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$ avec égalité s'il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ $|\alpha|f|^p = \beta|g|^{p'}$

Application 30 (inégalité de Minkowski): Si $(f,g) \in L^p(\mu)^2$, on a
$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Corollaire 31: L'espace $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé.

Théorème 32 (Riesz-Fischer): L'espace $(L^p(\Omega,\mathbb{K}), \|\cdot\|_p)$ pour Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ est un espace complet.

Corollaire 33: De toute suite convergente de $(L^p(\Omega,\mathbb{K}), \|\cdot\|_p)$, on peut extraire une sous-suite qui converge presque partout.
(DEV1)

Proposition 34: Le dual de $L^p(\Omega,\mathbb{K})$ pour Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ est $L^{p'}(\Omega,\mathbb{K})$ si $p \in]1,+\infty[$

Corollaire 35: L'espace $L^p(\Omega,\mathbb{K})$ pour Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ est réflexif, si $p \in]1,+\infty[$.

III - Densité dans les espaces L^p.

1- Fonctions continues.

Proposition 36: Pour $p \in [1,+\infty[$, l'ensemble des fonctions étagées intégrables est dense dans $L^p(\mu)$

Définition 37: On dit que $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ est une fonction en escalier si f s'écrit $f = \sum_{k=1}^m \alpha_k \mathbb{1}_{P_k}$, où les P_k sont des pavés de la forme $P_k = \prod_{i=1}^d I_k^i$ avec les I_k^i sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

Théorème 38 : Dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ muni de la mesure de Lebesgue λ

(1) l'ensemble des fonctions en escalier à support compact est dense dans $L^p(\lambda)$, $p\in[1,+\infty[$ pour $\|\cdot\|_p$.

(2) l'ensemble des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\lambda)$, $p\in[1,+\infty[$ pour $\|\cdot\|_p$.

Corollaire 39 : L'espace $L^p(\lambda)$ est séparable pour $p\in[1,+\infty[$ pour $\|\cdot\|_p$.

2- Convolution et fonctions $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$.

Définition 40 : Pour f et g deux fonctions mesurables, lorsqu'elle est définie, en un point $x\in\mathbb{R}^d$, on note $f*g(x)$ la convolution de f et g en x donnée par :

$$f*g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\,dy.$$

Théorème 41 : (1) Si $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g\in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors $f*g$ existe λ presque partout et $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$

(2) Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ à support compact et $g\in L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $p\in[1,+\infty[$ alors $f*g$ existe sur $\mathbb{R}^d$ et est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Application 42 : Deux variables aléatoires indépendantes sur $\mathbb{R}^d$ de densités respectives f et g vérifient que leur somme a pour densité $f*g$.

Définition 43 : Une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ positives est dite suite régularisante si :

(1) pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n(x)\,d\lambda(x) = 1$

(2) pour tout $\varepsilon>0$, $\lim_{n\to+\infty} \int_{\{|x|\geq\varepsilon\}} \alpha_n(x)\,d\lambda(x) = 0$

Proposition 44 : Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et Ω un ouvert contenant K alors il existe $\theta\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\theta=1$ sur K, $\theta=0$ sur $\mathbb{R}^d\setminus\Omega$ et $0\leq\theta\leq1$. (construction de fonctions plateaux).

Application 45 (Lemme de Borel) : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite quelconque et $x_0\in\mathbb{R}$. Il existe $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ telle que $\forall k\in\mathbb{N}$, $f^{(k)}(x_0)=a_n$

(DEV2 JZ)

Corollaire 46 : L'ensemble $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, pour $p\in[1,+\infty[$.

Application 47 (Lemme de Riemann-Lebesgue) :

Soit $f\in L^1(\lambda)$ alors $\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-ist}\,dt \xrightarrow[s\to+\infty]{} 0$

IV. Le cas spécial $L^2(\mathbb{R}^d)$.

1- Structure hilbertienne.

Proposition 48 : L'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$ muni du produit scalaire $\forall(f,g)\in L^2(\mathbb{R}^d)^2$, $\langle f,g\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\overline{g}(t)\,dt$ est un espace de Hilbert.

Définition 49 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que ω est une fonction poids si $\omega : I\to\mathbb{R}_+^*$ mesurable vérifie que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\int_I |x|^n\omega(x)\,dx<+\infty$.

Remarque 50 : Pour $(f,g)\in L^2(I)^2$, l'application $\langle f,g\rangle = \int_I f(x)\overline{g}(x)\omega(x)\,dx$ définit un produit scalaire. On note $L^2(I,\omega)$ l'espace de Hilbert associé à ce produit scalaire.

Proposition 51 : Il existe une unique famille de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\deg(P_n)=n$ pour $n\in\mathbb{N}$, et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale de $L^2(I,\omega)$. On l'appelle famille des polynômes orthogonaux associée à ω.

Proposition 52 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ω une fonction poids vérifiant qu'il existe $\alpha>0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|}\omega(x)\,dx<+\infty$. Alors la famille des polynômes orthogonaux associée à ω est une base hilbertienne de $L^2(I,\omega)$.

(DEV2 LC)

2- Séries de Fourier.

Proposition 53 : Si $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ désigne les fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ 2π-périodiques, c'est-à-dire, pour presque tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=f(x+2\pi)$, la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ donnée par $\forall n\in\mathbb{Z}, \forall x\in\mathbb{R}$, $e_n(x)=e^{inx}$ est une base hilbertienne.

Remarque 54 : La suite donnée par $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par : $\forall n\in\mathbb{Z}$, $c_n(f)=\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt$ pour $f\in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ est appelée suite des coefficients de Fourier de f.

Proposition 55 (égalité de Parseval) : Pour $f\in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$, on a l'égalité

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

Théorème 56 : Pour $f\in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$, on a $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=-n}^{n} c_n(f)e_n = f$ dans $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$

(convergence quadratique de la série de Fourier).