Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.

234

Cadre : $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré, $p \in [1,+\infty[$, λ est la mesure de Lebesgue. $n \in \mathbb{N}^*$

I) Les espaces L^p.

1) Inégalités et théorèmes de convergence.

Déf 1 : • $\mathcal{L}^p(\Omega,\mathcal{A},\mu) = \{ f : (\Omega,\mathcal{A}) \to (\mathbb{C},\mathcal{B}(\mathbb{C}))$ mesurable, $\int_\Omega |f|^p d\mu$ est finie $\}$. $\mathcal{L}^\infty(\Omega,\mathcal{A},\mu) = \{ f : (\Omega,\mathcal{A}) \to (\mathbb{C},\mathcal{B}(\mathbb{C}))$ mesurable, $\exists M \in \mathbb{R}_+$ $\mu(\{|f|>M\})=0\}$. Soit $q \in [1,+\infty]$. L^q est le quotient de $\mathcal{L}^q$ par la relation d'égalité μ-presque sûre ($f \sim g \Leftrightarrow \mu(\{f \neq g\})=0$).

Déf 2 : • $\|\cdot\|_p : \begin{cases} L^p \to \mathbb{R}_+ \\ f \mapsto \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \end{cases}$ (où on a identifié f à un de ses représentants).
• $\|\cdot\|_\infty : \begin{cases} L^\infty \to \mathbb{R}_+ \\ f \mapsto \inf\{M \in \mathbb{R}_+, \mu(|f|>M)=0\} \end{cases}$. Cet inf est un min.

Prop 3 (Hölder) : Soient $p,q \in [1,+\infty]$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ (où $\frac{1}{+\infty}=0$). Soient $f \in L^p$, $g \in L^q$. $fg \in L^1$ et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

App 4 : • Si μ est une mesure de masse finie ($\mu(\Omega)<+\infty$), en particulier si μ est une probabilité ($\mu(\Omega)=1$) alors : $\forall p \geq q$ $L^p \subset L^q$.
• Si μ est une mesure de comptage ($\mu(A)$ est le cardinal de A) alors : $\forall p \geq q$ $L^q \subset L^p$.

C-Ex 5 : $1 \in L^\infty(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ mais $1 \notin L^1(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$.
• $\frac{1}{x} \in L^2([1,+\infty[,\mathcal{B}([1,+\infty[),\lambda)$ mais $\frac{1}{x} \notin L^1([1,+\infty[,\mathcal{B}([1,+\infty[),\lambda)$.
• $\frac{1}{\sqrt{x}} \in L^1(]0,1[,\mathcal{B}(]0,1[),\lambda)$ mais $\frac{1}{\sqrt{x}} \notin L^2(]0,1[,\mathcal{B}(]0,1[),\lambda)$.

Prop 6 (Minkowski) : Soient $f,g \in L^p$. $f+g \in L^p$ et $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Rq 7 : Si $p \in [1,+\infty]$ alors L^p est un espace vectoriel normé.

Thm 8 (convergence monotone) : Soit (f_n) une suite croissante de fonctions mesurables positives. $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ est mesurable positive et $\int_\Omega f_n \, d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_\Omega \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \, d\mu$.

Cor 9 (Fatou) : Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives.
$$\int_\Omega \liminf f_n \, d\mu \leq \liminf \int_\Omega f_n \, d\mu.$$

Cor 10 (convergence dominée) : Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables telle que (f_n) converge simplement vers une fonction f et telle qu'il existe $g \in L^1$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$ $|f_n| \leq g$.
Les f_n et f sont dans L^1 et $\int_\Omega |f_n - f| d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'où $\int_\Omega f_n d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_\Omega f d\mu$.

Cor 11 (régularité des intégrales à paramètre) : Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $f : \Omega \times I \to \mathbb{C}$ telle que :
- μ-p.p.t. ω $f(\omega,\cdot)$ est continue (resp. dérivable) sur I ;
- $\forall t \in I$ $|f(\cdot,t)| \leq g$ (resp. $|\partial_t f(\cdot,t)| \leq g$) où $g \in L^1$.

Alors $\varphi : t \mapsto \int_\Omega f(\omega,t) d\mu(\omega)$ est continue sur I (resp. dérivable sur I de dérivée $t \mapsto \int_\Omega \partial_t f(\omega,t) d\mu(\omega)$).

Cor 12 (holomorphie des intégrales à paramètre) : Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $f : \Omega \times \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ telle que :
- μ-p.p.t. ω $f(\omega,\cdot)$ est holomorphe sur $\mathcal{O}$;
- $\forall t \in \mathcal{O}$ $|f(\cdot,t)| \leq g$ où $g \in L^1$.

Alors $\varphi : t \mapsto \int_\Omega f(\omega,t) d\mu(\omega)$ est holomorphe sur $\mathcal{O}$ de dérivée $t \mapsto \int_\Omega \partial_t f(\omega,t) d\mu(\omega)$.

App 13 : • $\Gamma : y \mapsto \int_0^{+\infty} t^{y-1} e^{-t} dt$ est holomorphe sur $\{y \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(y)>0\}$.
• Par convergence dominée, $\int_0^n t^{y-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Gamma(y)$ (pour $y \in$ ↑)
or $\int_0^n t^{y-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt = \frac{n^y n!}{y(y+1)\cdots(y+n)}$ d'où la convergence vers $\Gamma(y)$.

(*) 2) Intégrales multiples et changement de variables.

Thm 15 (Fubini-Tonelli) : Soient $(\Omega_1,\mathcal{A}_1,\mu_1)$, $(\Omega_2,\mathcal{A}_2,\mu_2)$ deux espaces mesurés σ-finis. Soit $f : (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \to ([0,+\infty],\mathcal{B}([0,+\infty]))$ mesurable. $\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f \, d\mu_1 \otimes \mu_2 = \int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} f \, d\mu_2\right) d\mu_1 = \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} f \, d\mu_1\right) d\mu_2$.

Thm 16 (Fubini) : Soient $(\Omega_1,\mathcal{A}_1,\mu_1)$, $(\Omega_2,\mathcal{A}_2,\mu_2)$ deux espaces mesurés σ-finis. Soit $f : (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \to (\mathbb{C},\mathcal{B}(\mathbb{C}))$ mesurable. Si f est $\mu_1 \otimes \mu_2$-intégrable alors les intégrales suivantes ont un sens et :
$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f \, d\mu_1 \otimes d\mu_2 = \int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} f \, d\mu_2\right) d\mu_1 = \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} f \, d\mu_1\right) d\mu_2.$$

(✱) **Théorème 14** (Riesz-Fischer) Soit $p \in [1,+\infty]$. $(L^p(\mathcal{B}, \lambda), \|.\|_p)$ est un espace de Banach.

Application 17: Soit $p \in]1,+\infty[$ et $q \in]1,+\infty[$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda)$ et $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda)$. Alors p.p.t. $x \in \mathbb{R}^n$ $\begin{array}{l}\mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \\ t \mapsto f(t)g(x-t)\end{array}$ est λ-intégrable et $f * g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(t)g(x-t)dt$ est bien définie et intégrable et $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$

Théorème 18 (changement de variable) Soit O_1 et O_2, des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et φ, un C^1-difféomorphisme de O_1 sur O_2. Soit f, borélienne de O_2 dans $\mathbb{C}$. Alors f est intégrable sur O_2 si et seulement si $x \mapsto |f\circ\varphi(x)||J_\varphi(x)| \in \mathcal{L}^1(O_1, \mathcal{B}(O_1), \lambda)$.
Dans ce cas: $\int_{O_2} f(x)d\lambda(x) = \int_{O_1} f(\varphi(y))|J_\varphi(y)|d\lambda(y)$

Application 19: Soit $\varphi :]0,1[\times]0,2\pi[\to \mathbb{D}(0,1)\setminus[0,1[\times\{0\}$, $(r,\theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$

On a $\int_{\mathbb{D}(0,1)\setminus[0,1[\times\{0\}} \frac{d\lambda(x)}{\|x\|} = \int_{(r,\theta)\in]0,1[\times]0,2\pi[} \frac{r\,d\lambda(r,\theta)}{r} = 2\pi$ D'où $x \mapsto \frac{1}{\|x\|} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{D}(0,1))$

II] Analyse fonctionnelle dans les $\mathcal{L}^p$.

1°) Parties denses de $L^p(O)$.

Dans la suite, O est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. $C_c^0(O) = \{f \in C^0(O,\mathbb{K}) \mid f \text{ à support compact}\}$

Théorème 20: $C_c^0(O)$ est un sous-espace vectoriel dense de $L^p(O)$.

Application 21: Soit $p \in [1,+\infty]$ et $q \in [1,+\infty]$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ (avec $\frac{1}{+\infty}=0$) et $(f,g) \in L^p(\mathbb{R}^n)\times L^q(\mathbb{R}^n)$. Alors $f*g \in C^0(\mathbb{R}^n)$.

Définition 22: Une suite régularisante est une suite $(\rho_q)_{q\in\mathbb{N}^*}$ de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\forall q \in \mathbb{N}^*$ $supp(\rho_q) \subseteq B(0,\frac{1}{q})$ $Im(\rho_q) \subseteq \mathbb{R}_+$ et $\|\rho_q\|_1 = 1$

Théorème 23: Soit $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$ et $(\rho_q)_{q\in\mathbb{N}^*}$ une suite régularisante et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$. i) Pour tout compact K de $\mathbb{R}^n$ $\lim_{q\to+\infty} \|\rho_q * f - f\|_{\infty,K} = 0$. ii) $\lim_{q\to+\infty}\|\rho_q * g - g\|_p = 0$ iii) $\forall q \in \mathbb{N}$ $\rho_q * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\rho_q * g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

Corollaire 24: $C_c^\infty(O)$ est dense dans $L^p(O)$

Application 25 (Riesz-Fréchet-Kolmogorov) Soit $\mathcal{F} \subseteq L^p(O)$ avec $\mathcal{F}$ bornée pour $\|.\|_p$ et: $\forall \varepsilon > 0$ $\forall \omega \subsetneq O$ ouvert tel que ω soit relativement compact dans Ω $\exists \delta \in]0, dist_2(\omega, \complement_{\mathbb{R}^n} O)]$ tel que: $\forall h \in \mathbb{R}^n$ si $\|h\|_2 < \delta$ alors $\forall f \in \mathcal{F}$ $\left(\int_\omega |f(x+h)-f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$ et: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \omega \subseteq \Omega$ tel que $\sup_{f\in\mathcal{F}} \|f\|_{L^p(O\setminus\omega)} < \varepsilon$ ω relativement compact. Alors $\mathcal{F}$ est relativement compact dans $L^p(O)$

2°) Transformée de Fourier et coefficients de Fourier.

Définition 26: Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ $t \mapsto f(t)e^{-i\xi \cdot t}$ est intégrable et $\xi \mapsto \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)e^{-i\xi\cdot t}dt$ est la transformée de Fourier de f

Proposition 27: Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. $\hat{f} \in C^0(\mathbb{R}^n)$ et: $\lim_{\|\xi\|_2\to+\infty} \hat{f}(\xi) = 0$

Exemple 28: $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$ $\mathcal{F}(x \mapsto e^{-a\|x\|^2}) = \xi \mapsto \sqrt{\frac{\pi}{a}}^n e^{-\frac{\|\xi\|^2}{4a}}$

Théorème 29 (Inversion de Fourier) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors: $f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot t}\hat{f}(t)dt$

Corollaire 30: La transformée de Fourier vérifie: $\forall f \in L^1\cap L^2(\mathbb{R}^n)$ $\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \sqrt{2\pi}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ et elle se prolonge donc par continuité sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ et y vérifie: $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ $\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \sqrt{2\pi}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$

Déf 31: Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $e_n : \begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto e^{int}\end{cases}$.
- $\mathcal{C}_{2\pi}$ est l'ensemble des fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ alors $\|f\|_\infty = \max_{[0,2\pi]}|f|$. Pour tout $p \in [1,+\infty[$ $\mathcal{L}^p_{2\pi}$ est l'ensemble des fonctions f boréliennes 2π-périodiques telles que $\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ est finie. Soit $N \in \mathbb{N}$. Le noyau de Dirichlet d'ordre N est $D_N = \sum_{k=-N}^{N} e_k$.
Le noyau de Fejér d'ordre $N \in \mathbb{N}^*$ est $K_N = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} D_k$.

Prop 32: ⓘ $\forall N \in \mathbb{N}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $D_N(x) = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}$.
ⓘⓘ $\forall N \in \mathbb{N}^*$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $K_N(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin(\frac{Nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\right)^2$.
ⓘⓘⓘ $\forall N \in \mathbb{N}$ $\forall f \in \mathcal{L}^1_{2\pi}$ $D_N * f = \sum_{k=-N}^{N} c_k(f)e_k$. $\left(c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{e_k(t)}dt\right)$
ⓘⓥ $\forall N \in \mathbb{N}^*$ $\forall f \in \mathcal{L}^1_{2\pi}$ $K_N * f = \sum_{k=-N}^{N}\left(1-\frac{|k|}{N}\right)c_k(f)e_k$. (cf. (□) en bas)

Déf 33: $(\varphi_n) \in (\mathcal{L}^1_{2\pi})^{\mathbb{N}^*}$ est une approximation de l'unité si:
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\varphi_n(x) \geq 0$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_n(t)dt = 1$
- $\forall \varepsilon > 0$ $\int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \varphi_n(t)dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Thm 34: $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une approximation de l'unité.

((□) Si $f,g \in \mathcal{L}_{2\pi}$, p.p.t. $x \in \mathbb{R}$ $f*g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)dt$. $f*g \in \mathcal{L}^1_{2\pi}$)

Thm. 35 (Fejér): ① Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$. (DEVT 1)
Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ $\|K_N * f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et $\|K_N * f - f\|_\infty \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$.
② Soit $f \in \mathcal{L}^p_{2\pi}$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ $\|K_N * f\|_p \leq \|f\|_p$ et $\|K_N * f - f\|_p \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$.

Rq 36: On utilise ① pour démontrer ②.

App 37: • $\forall x \in \mathbb{R}$ $\left(\sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e^{inx} \xrightarrow[N \to +\infty]{} \ell \in \mathbb{C} \Rightarrow \ell = f(x)\right)$.
• Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi} \cap \mathcal{C}^1_{m,2\pi}$. $\left(\sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n\right)_{N \in \mathbb{N}}$ converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.
• Soient $f, g \in \mathcal{L}^1_{2\pi}$. $(\forall n \in \mathbb{Z}\ c_n(f) = c_n(g)) \Leftrightarrow (f = g$ dans $L^1_{2\pi})$.

3°) Espace de Sobolev de dimension 1.

Définition 38 : I un intervalle... L'espace de Sobolev $W^{1,p}(I)$ est :
$$W^{1,p}(I) = \{u \in L^p(I) \mid u' \in L^p(I) \text{ dans } \mathcal{D}'(I)\}$$

Exemple 39: $C^1(\bar{I}) \subseteq W^{1,p}(I)$ si I est borné.
$x \mapsto \sqrt{x} \notin W^{1,2}(0,1)$. $x \mapsto e^x \notin W^{1,p}(\mathbb{R}_+)$

Proposition 40: $\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}$ est une norme sur $W^{1,p}(I)$ pour laquelle $W^{1,p}(I)$ est un Banach. $(u,v)_{H^1} = (u,v)_{L^2} + (u',v')_{L^2}$ est aussi une norme sur $W^{1,2}(I)$ et lui est équivalente.

Théorème 41: Il existe un opérateur de prolongement $P : W^{1,p}(I) \to W^{1,p}(\mathbb{R})$ linéaire tel que : $\exists c \in \mathbb{R}$ $\forall u \in W^{1,p}(I)$ $(Pu)_{|I} = u$; $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq c\|u\|_{W^{1,p}(I)}$; $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq c\|u\|_{L^p(I)}$

Théorème 42: Les fonctions C^∞ à support compact sur $\mathbb{R}$ sont denses dans $W^{1,p}(I)$.

Théorème 43: $\forall u \in W^{1,p}(I)$ $\exists \tilde{u} \in C^0(\bar{I})$ $\tilde{u} \in u$
De plus, si I est borné, alors : $\begin{array}{l} W^{1,p}(I) \to C^0(\bar{I}) \\ u \mapsto \tilde{u} \end{array}$ est compact.

Définition 44: $W^{1,p}_0(I) = \overline{C^\infty_c(I)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(I)}}$

Théorème 45: (Inégalité de Poincaré) I, borné.
$\exists C \in \mathbb{R}$ $\forall u \in W^{1,p}_0(I)$ $\|u\|_{W^{1,p}(I)} \leq C\|u'\|_{L^p(I)}$

Proposition 46: $\forall u \in W^{1,p}(I)$ $u \in W^{1,p}_0(I) \Leftrightarrow \tilde{u}(0) = 0 = \tilde{u}(1)$

App 47 (problème de Sturm-Liouville): $\forall p \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}^*_+)$ $\forall q \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}_+)$ $\forall f \in L^2(]0,1[)$ $\exists! u \in H^1_0(0,1)$ $-(pu')' + qu = f$ dans $\mathcal{D}'(0,1)$.

④ Les L^2 à poids.

Déf 48: Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction poids sur I est une fonction $\rho : I \to \mathbb{R}^*_+$ borélienne telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\int_I |x|^n \rho(x)\,dx < +\infty$.
$L^2(I,\rho) = L^2(I, \mathcal{B}(I), \rho(x)dx)$.

Prop 49: Muni de $\langle , \rangle_\rho : (f,g) \mapsto \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)\,dx$, $L^2(I,\rho)$ est un Hilbert.

Prop 50: Il existe une unique famille orthonormée $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\deg P_n = n$ et $\langle P_n, X^n \rangle_\rho \in \mathbb{R}_+$. On l'appelle la famille des polynômes orthogonaux de $L^2(I,\rho)$.

Thm 51: Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit ρ une fonction poids sur I telle que : $\exists \alpha > 0$ $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)\,dx < +\infty$. La famille des polynômes orthogonaux de $L^2(I,\rho)$ est une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$. (DEVT 2)

Rq 52: On peut donc approximer $f \in L^2(I,\rho)$ par les projetés de f sur $\mathrm{Vect}(P_n)_{n \in [\![0,N]\!]}$

On peut trouver des familles de polynômes orthogonaux grâce à des équations différentielles de Sturm-Liouville de la forme :
$(Rf')' + \frac{Rc_n}{Q} f = 0$ ou $Qf'' + Lf' + c_n f = 0$ où Q (resp. L) est un polynôme de degré au plus 2 (resp. 1), c_n est une constante et $R = e^{\int_{x_0}^{x} \frac{L}{Q}}$ pour un x_0, $c_n = n\left(\frac{1-n}{2} Q'' - L'\right)$, I intervalle maximal où Q ne s'annule pas (à choisir), $\frac{R}{Q}$ poids sur I, $P_n = \frac{Q}{R}(RQ^{n-1})^{(n)}$ à une constante multiplicative près.

Ex 53 (Legendre): $((1-x^2)f')' + n(n+1)f = 0$ ou $(1-x^2)f'' - 2xf' + n(n+1)f = 0$
Poids 1, intervalle $]-1,1[$, $P_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}((1-x^2)^n)^{(n)}$.
$\alpha = 1$ convient pour l'hypothèse du Thm 50, donc on a une base hilbertienne de $L^2(]-1,1[,1)$.

Ex 54 (Laguerre): $(xe^{-x}f')' + ne^{-x}f = 0$ ou $xf'' + (1-x)f' + nf = 0$.
Poids e^{-x}, intervalle $\mathbb{R}^*_+$, $P_n = \frac{e^x}{n!}(e^{-x}x^n)^{(n)}$.
$\alpha = \frac{1}{2}$ convient, donc on a une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^*_+, e^{-x})$.

Ex 55 (Hermite): $(e^{-x^2}f')' + 2ne^{-x^2}f = 0$ ou $f'' - 2xf' + 2nf = 0$.
Poids e^{-x^2}, intervalle $\mathbb{R}$, $P_n = (-1)^n e^{x^2}(e^{-x^2})^{(n)}$
$\alpha = 1$ convient, donc on a une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2})$.

App 56: $\left(\frac{(-1)^n}{2^n} e^{\frac{x^2}{2}} (e^{-x^2})^{(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

Références: Beck-Malick-Peyré, Queffélec-Zuily, Candelpergher, Briane-Pagès, Hirsch-Lacombe, Brezis.