234

Espaces L^p, $1 \le p \le +\infty$.

On se place dans un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

I - Généralités sur les espaces L^p, $1 \le p \le +\infty$

1°) Espaces $\mathcal{L}^p$, $1 \le p \le +\infty$

Déf 1 : Pour tout réel p tel que $1 \le p < +\infty$, on définit :
$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) = \{ f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K}))$ mesurable $/ \int_X |f|^p d\mu < +\infty \}$
d'opérateur associé : $\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$

Ex 2 : $\ell^p(\mathbb{N}) = \{ (a_n)_{n \ge 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \ / \ \sum |a_n|^p < +\infty \} = \mathcal{L}^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$
avec m mesure de comptage.

Déf 3 : Pour $p = +\infty$, on définit :
$\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) = \{ f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K})) \ / \ \|f\|_\infty < +\infty \}$
d'opérateur associé : $\|f\|_\infty = \operatorname{supess}(f) = \inf\{ M > 0 \ / \ \mu(f > M) = 0 \}$

Prop 4 : Pour tout $\boxed{p > 0}$, $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un $\mathbb{K}$ev.

⚠ ne pas parler de $p<1$

2°) Définitions et quelques propriétés sur L^p :

Pb : $(\mathcal{L}^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ sont des ev semi-normé pour tout $1 \le p \le +\infty$:
Il manque l'implication : $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$ pour $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$

Solut° : on souhaite avoir des espaces normés proches des espaces $\mathcal{L}^p$.
Pour ce faire, on quotiente les $\mathcal{L}^p$ par la RE : $[f \sim g \Leftrightarrow f = g \ \mu pp]$

Rappel : $f = g \ \mu pp$ ssi $\mu(\{ x \in X, f(x) \neq g(x) \}) = 0$ avec f, g mesurables.

Déf 5 : on définit pour $p \in [1, +\infty]$, $L^p(\mu) = \mathcal{L}^p(\mu) / \sim$; ⚠
muni de la norme $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$.

Rem 6 : classe d'équivalence : $\overline{f} = \{ g \in \mathcal{L}^p(\mu) \ / \ \|f\|_p = \|g\|_p$ ie $f = g \ \mu pp \}$
Ne pas confondre une fonction de $\mathcal{L}^p$ et son représentant de sa classe d'équivalence.

Prop 7 : Inégalité de Hölder :
Si $f \in L^p(\mu)$, $g \in L^q(\mu)$ avec $p, q > 1$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
alors $fg \in L^1(\mu)$ et $\|fg\|_1 \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q$

Inégalité de Minkowski :
Si $f, g \in L^p(\mu)$ avec $p \in [1, +\infty]$ alors $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$

Prop 8 : $\forall p > 0$, $L^p(\mu)$ est un $\mathbb{K}$evn.

Prop 9 : Si μ mesure finie ($\mu(X) < +\infty$) alors $\forall 0 \le p \le q$, $L^q(\mu) \subset L^p(\mu)$

Ex 10 : $\dfrac{\mathbb{1}_{]0,1]}}{\sqrt{x}} \in L^1(\lambda) \setminus L^2(\lambda)$ et $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \in L^2(\lambda) \setminus L^1(\lambda)$
avec λ mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ non finie.

3°) Convergence et complétude dans L^p.

Thm 11 : Riesz Fischer : DVLP 1

a) $\forall p \in [1, +\infty]$, $L^p(\mu)$ est un espace de Banach.

b) soient $p \in [1, +\infty]$, $(f_n)_{n \ge 0} \in L^p(\mu)$ et $f \in L^p(\mu)$.
Si $f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\|\cdot\|_p} f$ alors on peut extraire une sous suite $(f_{\varphi(n)})_{n \ge 0}$ et $\exists g \in L^p(\mu)$ telle que :
- $|f_{\varphi(n)}| \le g \ \mu pp$
- $f_{\varphi(n)} \xrightarrow[\mu pp]{} f$

Ex 12 : on se place sur $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ avec λ mesure de Lebesgue
soit $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$. $f_{2^n + k} := \mathbb{1}_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[}$ converge en $\|\cdot\|_p$
mais ne converge pas μpp.

Thm 13 : Convergence L^p-dominée, $1 \le p < +\infty$:
soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de fonction de $\mathcal{L}^p(\mu)$ telle que $f_n \xrightarrow{\mu pp} f$

a) Si $\sup \|f_n\|_p < +\infty$ alors $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$

b) Si $\exists g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ telle que $|f_n| \le g \ \mu pp \ \forall n \in \mathbb{N}$
alors $f_n \xrightarrow{L^p} f$.

utilisé avan

Rmq 14 : csqce de la prop 9 : convergence dans $L^q \Rightarrow$ convergence dans L^p

II - Analyse Fonctionnelle dans $\mathcal{L}^p$:

1°) Dualité - Densité : incontournable

Déf 15 : soit $p, q \in [1, +\infty]$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
on dit que q est l'exposant conjugué de p.

Thm 16 : Théorème de Riesz :
soit μ une mesure finie. soit $1 \leq p < +\infty$. soit $\varphi \in (\mathcal{L}^p(\mu))'$.
Alors $\exists ! g \in \mathcal{L}^q(\mu)$ tel que $\langle \varphi, f \rangle = \int_X f\bar{g}\, d\mu \quad \forall f \in \mathcal{L}^p(\mu)$
De plus, $\|\varphi\|_{(\mathcal{L}^p)'} = \|g\|_{\mathcal{L}^q}$.

On en déduit le corollaire suivant :

Cor 17 : soit μ une mesure σ-finie. $\forall p \in [1, +\infty[$, $(\mathcal{L}^p(\mu))' \simeq \mathcal{L}^q(\mu)$.
on dit que $(\mathcal{L}^p(\mu))'$ est isométriquement isomorphe à $\mathcal{L}^q(\mu)$:

$$T : \left(\begin{array}{ccl} \mathcal{L}^q(\mu) & \longrightarrow & (\mathcal{L}^p(\mu))' \\ g & \longmapsto & \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{L}^p(\mu) & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & \int_X f\bar{g}\, d\mu \end{array} \right) \end{array} \right)$$

Rmq 18 : $(\mathcal{L}^1(\mu))' \simeq \mathcal{L}^\infty(\mu)$ mais $(\mathcal{L}^\infty(\mu))' \not\simeq \mathcal{L}^1(\mu)$, $\mathcal{L}^1(\mu) \subsetneq (\mathcal{L}^\infty(\mu))'$

Prop 19 : soit $p \in [1, +\infty[$
+ l'ensemble des fonctions étagées intégrables est dense dans $\mathcal{L}^p(\mu)$
+ l'ensemble des fonctions étagées est dense dans $\mathcal{L}^\infty(\mu)$.

Thm 20 : on se place sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ avec λ mesure de Lebesgue.
+ L'ensemble des fonctions en escalier à support compact est dense dans tous les espaces $\mathcal{L}^p$ $(1 \leq p < +\infty)$

Thm 20' + soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. $\overline{C_c^\infty(\Omega)} = \mathcal{L}^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$

Prop 21 : $\mathcal{L}^1(\mu) \cap \mathcal{L}^2(\mu)$ est dense dans $\mathcal{L}^2(\mu)$

2°) Structure Hilbertienne de $\mathcal{L}^2(\mu)$

Déf 22 : La forme sesquilinéaire définit par : $\left(\begin{array}{ccl} \mathcal{L}^2(\mu) \times \mathcal{L}^2(\mu) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (f, g) & \longmapsto & \int_X f\bar{g}\, d\mu \end{array} \right)$
est appelé "produit scalaire" et noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
L'application $\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle}$ définit une norme sur $\mathcal{L}^2(\mu)$.

Lem 23 : Identité du parallélogramme : DVLP 2
Si $f, g \in \mathcal{L}^2(\mu)$ alors $\|f+g\|_2^2 + \|f-g\|_2^2 = 2(\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2)$

Thm 24 : de projection orthogonale : DVLP 2 pas obligé.
Soit F un sev fermé de $\mathcal{L}^2(\mu)$.
Alors toute fonction g de $\mathcal{L}^2(\mu)$ peut se décomposer de manière unique sous la forme :

$$g = f + h \quad \text{où } f \in F, \text{ et } \langle \varphi, h \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in F.$$

Autrement-dit, $\mathcal{L}^2(\mu)$ se décompose sous la forme :

$$\mathcal{L}^2(\mu) = F \oplus F^\perp \quad \text{où } F^\perp = \{ u \in \mathcal{L}^2(\mu) \mid \forall \varphi \in F, \langle \varphi, u \rangle = 0 \}$$

La fonction f est appelée la projection orthogonale de g sur F. Elle vérifie, l'égalité suivante :

$$\|g - f\|_2 = \min_{\varphi \in F} \|g - \varphi\|_2$$

Thm 25 : de représentation de Riesz - DVLP 3
soit $\phi : (\mathcal{L}^2(\mu) \to \mathbb{K}) \in (\mathcal{L}^2(\mu))'$.
Alors $\exists ! g \in \mathcal{L}^2(\mu)$ telle que $\forall f \in \mathcal{L}^2(\mu)$, $\phi(f) = \int_X f\bar{g}\, d\mu$.

Rmq 26 : $\mathcal{L}^2(\mu)$ est un espace de Hilbert. a mettre avant

III - Différents domaines d'utilisation des espaces $\mathcal{L}^p$

1°) Convolution et Régularisation : IMPORTANT

On se placera sur $X = \mathbb{R}^d$.

Déf 27 : soit $f, g : ((\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \to \mathbb{R}_+)$ fct° boréliennes positive. La convolée de f et g, est définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, \lambda_n(dy)$

Déf 28 : soient $f, g : ((\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \to \mathbb{K})$ fct° boréliennes.
$\forall x \in \mathbb{R}^d$, $y \mapsto f(x-y)g(y) \in \mathcal{L}^1(\lambda_d) \iff |f| * |g|(x) < +\infty$.
on peut alors définir la convolée de f et g par :
$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\lambda_d(dy)$$

Prop 29 : Si $f \in \mathcal{L}^1(\lambda_d)$, $g \in \mathcal{L}^p(\lambda_d)$ avec $1 \le p \le +\infty$ alors $f * g \in \mathcal{L}^p(\lambda_d)$
Plus précisément, $\|f * g\|_p \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_p$

Prop 30 : Inégalité de Young :
Si $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^d)$ avec $1 \le p, q \le +\infty$ et $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \ge 0$
alors $f * g \in \mathcal{L}^r(\mathbb{R}^d)$ et $\|f * g\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q$.

Thm 31 : Le $\mathbb{K}$ev $(\mathcal{L}^1(\lambda_d), +, \cdot)$ muni de l'opération $*$ est une $\mathbb{K}$algèbre commutative ne possédant pas d'unité

Rmq 32 : Pour pallier l'absence d'élément neutre pour la convolution sur $\mathcal{L}^1(\lambda_d)$, des approximations de l'unité, ie des suites de fonction $(\alpha_n)_{n \ge 0}$ se comportant asymptotiquement comme une unité.
on souhaite $\lim_{n \to +\infty} \alpha_n * f = f$

Déf 33 : Une suite $(\alpha_n)_{n \ge 0} \in \mathcal{L}^1(\lambda_d)$ est une approximation de l'unité si :
(i) $\forall n \ge 1$, $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n \, d(\lambda_d) = 1$
(ii) $\sup_{n \ge 1} \int_{\mathbb{R}^d} |\alpha_n| \, d(\lambda_d) < +\infty$
(iii) $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_n \int_{\{|x| \ge \varepsilon\}} |\alpha_n| \, d(\lambda_d) = 0$

Ex 34 : 1°) $\varphi_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2 n^2}$, 2°) $\psi_n(x) = \frac{n}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + n^2 x^2}$

Déf 35 : une suite régularisante est une approximation de l'unité, telle que $(\alpha_n)_{n \ge 1} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$

Prop 36 Si $f \in \mathcal{L}^p(\lambda_d)$, avec $1 \le p < +\infty$ et $(\alpha_n)_{n \ge 1}$ une approximation de l'unité (ou suite régularisante) alors $\alpha_n * f \in \mathcal{L}^p$ et $\alpha_n * f \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$

Cor 37 : soit Ω ouvert. $\overline{C_c^\infty(\Omega)} = \mathcal{L}^p(\Omega)$ pour $1 \le p < +\infty$.

2°) Transformée de Fourier.

Déf 38 : soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$. on appelle transformée de Fourier de f la fonction $\hat{f}$ définie par : $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$, $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle \xi, x \rangle} dx$

Ex 39 : 1°) $\hat{f}(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}$ pour $f(x) = e^{-|x|}$, 2°) $\hat{f}(\xi) = \frac{e^{-ia\xi}}{i\xi} - \frac{e^{-ib\xi}}{i\xi}$ pour $f = \mathbb{1}_{[a,b]}$

Prop 40 : La transformation de Fourier est l'application injective :
$\wedge : (\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) \to C_0^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) = \{ u \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid \lim_{|\xi| \to \infty} u(\xi) = 0 \})$

Pb : $\mathcal{L}^1, \mathcal{L}^2$ ne sont pas comparable. on ne peut étendre $\mathcal{L}^1$ (ou restreindre) à $\mathcal{L}^2$.

Théo 41 : Transformation de Fourier - Plancherel.
1) Si $f \in \mathcal{L}^1 \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ alors $\hat{f} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ et $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$
2) $\exists !$ application $\mathcal{F} : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ telle que :
a) $\mathcal{F}$ est une isométrie linéaire
b) $\mathcal{F}_{|\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2}$ est la transformée de Fourier.

3°) Probabilités.

on se place sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
on considère $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \{ X \text{ va} \mid E[|X|^p] < +\infty \}$ avec $\|X\|_p = E[|X|^p]^{1/p}$

Déf 42 : soit $(X_n)_{n \ge 0}$ va de moment p ($\in \mathcal{L}^p$). soit $X \in \mathcal{L}^p$.
$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} X$ si $\|X_n - X\|_p \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Déf 43 : La suite (X_n) de va converge en probabilité vers la va X si
$\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$. on note $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$

Prop 44 : soient $(X_n)_{n \ge 0}, X$ va $\in \mathcal{L}^p$, si $X_n \xrightarrow[\|\cdot\|_p]{} X$ alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$

Rmq 45 : En général, la convergence en probabilité n'entraine pas la convergence dans $\mathcal{L}^p$.

Ex 46 : $X_n \sim \frac{1}{n}\delta_{n^2} + (1 - \frac{1}{n})\delta_0$, $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ mais ne converge pas dans $\mathcal{L}^1$.

Rappel : une suite (X_n) est uniformément intégrable si
$$\lim_{c \to +\infty} \sup_{n \ge 0} E[|X_n| \mathbb{1}_{\{|X_n| > c\}}] = 0$$

Thm 47 : soit $p \ge 1$ et (X_n) suite de va de moment d'ordre p. DVLP 3
1) (X_n) converge dans $\mathcal{L}^p$
2) (X_n) suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^p$ ie $\lim_{m,n} E[|X_n - X_m|^p] = 0$
3) $(|X_n|^p)$ est uniformément intégrable et $\exists X \in \mathcal{L}^p$ tel que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$
les assertions précédentes sont équivalentes.

Références :

- Théorie de l'intégration - Marc Briane - Pagès .
- Analyse Fonctionnelle - Haïm Brézis .
- Mesures, intégrat°, convolut° et transformée de Fourier
- Calcul intégral - Faraut .
- Probabilités T2 - Ouvrard .
- Analyse pour l'agrégation - Zuily - Queffélec .

DEVELOPPEMENT 1

Théorème (Riesz Fisher)

a) L^p est un espace de Banach pour $p \in [1, +\infty]$

b) Soient (f_n) une suite de L^p et $f \in L^p$ tels que $\|f_n - f\|_p \to 0$. Alors il existe une sous suite extraite (f_{n_k}) telle que

i) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ μ presque partout

ii) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ presque partout, $\forall k$ avec $h \in L^p$

Preuve

a) On considère tout d'abord le cas $p = +\infty$

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de L^∞

Soit $k \in \mathbb{N}$ $k \geq 1$, il existe N_k tel que $\forall n, m \geq N_k$

$$\|f_m - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{k}$$

Ainsi, il existe un ensemble E_k, tel que E_k soit négligeable et

$$\forall x \in X \setminus E_k \quad |f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \quad \text{pour } m, n \geq N_k$$

Posons $E = \bigcup_k E_k$, E est négligeable.

Soit $x \in X \setminus E$, avec l'inégalité précédente, on obtient que la suite numérique $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ qui est complet, $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ $\forall x \in X \setminus E$.

Reprenons l'inégalité précédente

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}$$

En passant à la limite en $m \to +\infty$, on obtient

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \quad \forall x \in X \setminus E, \forall n \geq N_k$$

Or $|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \leq \frac{1}{k} + \|f_n\|_\infty < +\infty$

Donc $f \in L^\infty$

et $\|f - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{k} \quad \forall n \geq N_k$

On obtient donc $\|f - f_n\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

On a donc que L^∞ est complet

A présent considérons $p \in [1, +\infty[$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de L^p

Soit $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$, pour cet ε, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall m,n \geq n_1$ on a

$$\|f_m - f_n\| \leq \frac{1}{2}$$

A présent si on choisit $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$, il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n_2 \geq n_1$ et $\forall m,n \geq n_2$

$$\|f_m - f_n\| \leq \frac{1}{2^2}$$

On peut ainsi construire par récurrence une suite d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ croissante telle que la sous suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ extraite de (f_n) vérifie l'inégalité suivante

$$\forall k \geq 1, \ \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \frac{1}{2^k}$$

Montrons que la suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge

Par souci de notations, écrivons f_k pour f_{n_k}

L'inégalité précédente devient alors

$$\forall k \geq 1 \quad \|f_{k+1} - f_k\|_p \leq \frac{1}{2^k} \qquad (*)$$

Posons à présent

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|$$

$(g_n) \in L^p$ en tant que somme finie de fonctions L^p et

$$\|g_n\|_p = \left\|\sum_{k=1}^{n} |f_{k+1} - f_k|\right\|_p \leq \sum_{k=1}^{n} \|f_{k+1} - f_k\|_p$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$$

Or $\frac{1}{2^k}$ est le terme général d'une série convergente

donc

$$\|g_n\|_p \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1$$

Ainsi $\|g_n\|_p \leq 1$

De plus (g_n) est croissante donc elle converge dans L^p vers $g \in L^p$

En particulier $\forall x \in X$, $g_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(x)$

Soient à présent m, n $m \geq n$

$$|f_m(x) - f_n(x)| = |f_m(x) - f_{m-1}(x) + f_{m-1}(x) + \dots + f_{n+1}(x) - f_n(x)|$$
$$\leq |f_m(x) - f_{m-1}(x)| + \dots + |f_{n+1}(x) - f_n(x)|$$
$$= g_m(x) - g_{n-1}(x)$$
$$\leq g(x) - g_{n-1}(x)$$

On en déduit ainsi que $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy et donc converge vers $f(x)$

En reprenant l'inégalité précédente, en passant à la limite en m, il en résulte que

$$|f(x) - f_n(x)| \leq g(x) - g_{n-1}(x) \leq g(x) \quad \text{car} \quad g_{n-1}(x) \geq 0$$

En particulier

$$|f(x)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)|$$
$$\leq g(x) + |f_n(x)|$$

or $g + |f_n| \in L^p$ car $g \in L^p$, $f_n \in L^p$

donc $f \in L^p$

Enfin puisque $|f(x) - f_n(x)| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ on a que

$$|f(x) - f_n(x)|^p \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

et $|f_n(x) - f(x)|^p \leq g^p(x)$ avec $g^p \in L^1$

Donc par le théorème de convergence dominée

On obtient que

$$\|f_n - f\|_p \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc L^p est complet car toute suite de Cauchy de L^p admet une sous suite convergente et donc converge.

b) Pour $p = +\infty$, (f_n) convient

A présent si $p \in [1, +\infty[$, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est en particulier de Cauchy. On peut donc, de la même manière que dans a) extraire une sous suite (f_{n_k}) vérifiant (*). En reprenant le raisonnement précédent $(f_{n_k}(x))$ converge presque partout vers $f(x)$

Toujours de la même manière que pour a)

$$|\tilde{f}(x) - f_{n_k}(x)| \leq g(x)$$

Encore une fois, nous obtiendrons que $\tilde{f} \in L^p$ et que $f_{n_k} \to \tilde{f}$ dans L^p. Finalement $f = \tilde{f}$

Pour ii) il suffit de choisir $h = \tilde{f} + g$.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Identité du parallélogramme

$$\forall f, g \in L^2_{\mathbb{K}}(\mu) \quad \|f+g\|_2^2 + \|f-g\|_2^2 = 2(\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2)$$

Preuve

$$\|f+g\|_2^2 = \langle f+g, f+g\rangle = \langle f,f\rangle + \langle g,g\rangle + \langle f,g\rangle + \overline{\langle f,g\rangle}$$
$$= \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(f,g)$$
$$\|f-g\|_2^2 = \langle f-g, f+g\rangle = \langle f,f\rangle + \langle g,g\rangle - \langle f,g\rangle - \overline{\langle f,g\rangle}$$
$$= \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\langle f,g\rangle$$

D'où le résultat en sommant

Théorème de projection

Soit F un sev fermé de $L^2_{\mathbb{K}}(\mu)$. Alors toute fonction $g \in L^2_{\mathbb{K}}(\mu)$ peut se décomposer de manière unique sous la forme $g = f+h$ avec $f \in F$ et $\forall \varphi \in F, (\varphi, h) = 0$

Autrement dit, $L^2_{\mathbb{K}}(\mu)$ se décompose en somme directe sous la forme $L^2_{\mathbb{K}}(\mu) = F \oplus F^\perp$ où $F^\perp = \{u \in L^2_{\mathbb{K}}(\mu) \mid \forall \varphi \in F\ (\varphi, u) = 0\}$

Preuve

Soit $d = \inf_{\varphi \in F} \|g - \varphi\|_2 \in \mathbb{R}_+$. Par définition de l'inf, il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F telle que

$$d = \lim_{n\to+\infty} \|g - \varphi_n\|_2$$

Par l'identité du parallélogramme
Soient

$$2\left(\left\|\frac{\varphi_m - g}{2}\right\|_2^2 + \left\|\frac{\varphi_n - g}{2}\right\|_2^2\right) = \left\|\frac{\varphi_m + \varphi_n}{2} - g\right\|_2^2 + \left\|\frac{\varphi_m - \varphi_n}{2}\right\|_2^2$$

F étant un sous-espace vectoriel de $L^2_{\mathbb{K}}(\mu)$ on obtient que $\frac{\varphi_m + \varphi_n}{2} \in F$ et ainsi que

$$\left\|\frac{\varphi_m + \varphi_n}{2} - g\right\|_2^2 \geq \left(\inf_{\varphi \in F} \|\varphi - g\|_2\right)^2 = d^2$$

Il en résulte

$$4d^2 + \|\varphi_m - \varphi_n\|_2^2 \leq 2\|\varphi_m - g\|_2^2 + 2\|\varphi_n - g\|_2^2$$

donc

$$\|\varphi_m - \varphi_n\|_2^2 \leq 2\big(\underbrace{\|\varphi_m - g\|_2^2}_{\substack{\to d^2 \\ m\to+\infty}} + \underbrace{\|\varphi_n - g\|_2^2}_{\substack{\to d^2 \\ n\to+\infty}} - 2d^2\big)$$

Ainsi, par définition de $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on en déduit que (φ_n) est une suite de Cauchy de F.

Or F est un sous espace vectoriel fermé de $L^2_{\mathbb{K}}(\mu)$ qui est complet, F est donc complet. Il s'ensuit que la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f \in F$

Montrons que f ainsi trouvée vérifie les propriétés requises.

Par construction, on a bien que

$$\|g - f\|_2 = \min_{\varphi\in F} \|g - \varphi\|_2$$

Posons à présent $h = g - f$ et montrons que $\forall \varphi \in F$, $(h, \varphi) = 0$

Soit $\varphi \in F$, $t > 0$, F étant un sous espace vectoriel, $t\varphi + f \in F$

Considérons à présent

$$\|h\|_2^2 = \|g - f\|_2^2 \leq \|g - (t\varphi + f)\|_2^2 \quad \text{par définition de l'inf}$$

$$= \|(g - f) - t\varphi\|_2^2 = \|h - t\varphi\|_2^2$$

$$\leq \|h\|_2^2 + t^2\|\varphi\|_2^2 - 2t\,\mathrm{Re}(h, \varphi)$$

On a donc $\quad 0 \leq t^2\|\varphi\|_2^2 - 2t(\mathrm{Re}(h, \varphi))$

$$0 \leq t\|\varphi\|_2^2 - 2\,\mathrm{Re}(h, \varphi)$$

En faisant tendre t vers 0 on obtient

$$\mathrm{Re}(h, \varphi) \leq 0 \qquad \forall \varphi \in F$$

en particulier
$\mathrm{Re}(h, -\varphi) \leq 0$ d'où $\mathrm{Re}(h, \varphi) \geq 0$ ce qui donne $\mathrm{Re}(h, \varphi) = 0$

De plus $\mathrm{Re}(h, i\varphi) = 0$

$$= \mathrm{Re}(-i(h, \varphi)) = \mathrm{Im}(h, \varphi)$$

Ainsi on en déduit que $(h, \varphi) = 0 \ \forall \varphi \in F$

Il reste à prouver l'unicité d'une telle décomposition

Supposons $g = f+h = f'+h'$ $\quad f,f' \in F,\ h,h' \in F^\perp$

On a ainsi $f-f' = h'-h$

Il en résulte

$$\langle f-f', f\rangle = 0 = \langle f-f', f'\rangle = \langle f-f', f-f'\rangle$$

Or $\langle\ ,\ \rangle$ étant un produit scalaire, on en déduit que $f-f' = 0$ d'où $f=f'$ et $h=h'$

Théorème de représentation de Riesz (ou Lemme de Riesz-Fisher)

Soit $\Phi : L^2_{\mathbb{K}}(\mu) \to \mathbb{K}$ une forme linéaire continue.

Alors il existe une unique fonction $g \in L^2_{\mathbb{K}}(\mu)$ telle que

$$\forall f \in L^2_{\mathbb{K}}(\mu) \quad \Phi(f) = \int_X f\bar{g}\, d\mu$$

Preuve $\quad F = \Phi^{-1}\{0\}$ est un sous espace vectoriel de $L^2_{\mathbb{K}}(\mu)$ fermé en tant qu'image réciproque d'un fermé par une fonction continue.

Si $\Phi = 0$ alors $g=0$ convient

si $\Phi \neq 0$, il existe $h \in F^\perp \setminus \{0\}$.

Posons $g = \dfrac{\overline{\Phi(h)}}{\|h\|_2^2}\, h \in F^\perp$

Soit $f \in L^2_{\mathbb{K}}(\mu)$. $\Phi(g) \neq 0$ car $g \in F^\perp$

Posons $\lambda = \dfrac{\Phi(f)}{\Phi(g)} \in \mathbb{K}$

$$\Phi(f-\lambda g) = \Phi(f) - \lambda\Phi(g) = 0$$

Ainsi $f-\lambda g \in F$

Il en résulte $\langle f-\lambda g, g\rangle = 0$ car $g \in F^\perp$

On en déduit que $\lambda = \dfrac{\langle f,g\rangle}{\|g\|_2^2}$

Finalement $\Phi(f) = \lambda\Phi(g) = \dfrac{\Phi(g)}{\|g\|_2^2}\langle f,g\rangle$

$$= \langle f,g\rangle$$

DEVELOPPEMENT 3 Ouvrard.

Il s'agit de prouver le théorème suivant :
On considère l'espace $(\Omega, F, \mathbb{P})$
Soit $p \geq 1$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires admettant un moment d'ordre p. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ converge dans L^p
ii) la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans L^p

$$\lim_{m,n} \mathbb{E}[|X_n - X_m|^p] = 0$$

iii) La suite $(|X_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformement integrable et il existe $X \in L^p$ tel que

$$X_n \xrightarrow[\mathbb{P}]{} X$$

Pour démontrer ce résultat, on utilisera les outils suivants :
- définitions de l'uniforme intégrabilité et de la notion d'équicontinuité.
- caractérisation de l'uniforme intégrabilité
- caractérisations de la convergence en probabilité
- lemme de Fatou
- l'équivalence "$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy en probabilité si et seulement si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité"

Avant de commencer, on se propose de montrer le lemme suivant
Lemme Soit $p \geq 1$ $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$

$$|a-b|^p \leq 2^{p-1}[|a-c|^p + |c-b|^p]$$

ne pas faire car trivial.

Preuve la fonction $x \mapsto x^p$ étant convexe sur $\mathbb{R}^+$
$\forall x, y \in \mathbb{R}^+$, on a $\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)^p \leq \frac{1}{2}(x^p + y^p)$

d'où $(x+y)^p \leq 2^{p-1}(x^p + y^p)$

à présent $|a-b| = |a-c+c-b| \leq |a-c| + |c-b|$
par croissance de $x \mapsto x^p$ il en résulte

$$|a-b|^p \leq (|a-c| + |c-b|)^p \leq 2^{p-1}(|a-c|^p + |c-b|^p)$$

Prouvons à présent le théorème.

i) => ii) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans L^p vers $X \in L^p$

On a $\lim_n \mathbb{E}[|X_n - X|^p] = 0$

Soient $m,n \in \mathbb{N}$, considérons

$$\|X_n - X_m\|_p = \|X_n - X + X - X_m\|_p$$

par Minkowski

$$\leq \underbrace{\|X_n - X\|_p}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} + \underbrace{\|X - X_m\|_p}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

d'où $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans L^p

ii) => iii) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans L^p

Soit $\varepsilon > 0$, pour cet ε, il existe N tel que

$\forall n,m \geq N \quad \mathbb{E}[|X_n - X_m|^p] \leq \frac{\varepsilon}{2^p}$

Considérons $A \in \mathcal{F}$

$$\int_A |X_n|^p dP = \int_A |X_n - X_N + X_N|^p \leq 2^{p-1}\left(\int_A |X_N|^p dP + \int_A |X_n - X_N|^p dP\right)$$

par le lemme

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2^{p-1}\int_A |X_N|^p dP$$

En passant au sup sur $n \geq N$

$$\sup_{n\geq N} \int_A |X_n|^p dP \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2^{p-1}\int_A |X_N|^p dP$$

puis $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_A |X_n|^p dP = \max\left(\sup_{n\leq N}\int_A |X_n|^p dP, \sup_{n\geq N}\int_A |X_n|^p dP\right)$

$$\leq \sup_{n\leq N}\int_A |X_n|^p dP + \sup_{n\geq N}\int_A |X_n|^p dP$$

$$\leq \sup_{n\leq N}\int_A |X_n|^p dP + \frac{\varepsilon}{2} + 2^{p-1}\int_A |X_N|^p dP$$

Ainsi $\{|X_n|^p, n\in\mathbb{N}\}$ est bornée dans L^1 en prenant $A = \Omega$

Montrons que cette famille est équicontinue.

$\{|X_n|^p, n \leq N\}$ étant finie, elle est uniformément intégrable, et en particulier équicontinue

Il résulte de l'inégalité précédente que $\{|X_n|^p, n\in\mathbb{N}\}$ est équicontinue.

Par conséquent $(|X_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformement integrable.

Montrons à present qu'elle converge en probabilité vers $X \in L^p$

Soient $m,n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|X_n - X_m| > \varepsilon) = \mathbb{P}(|X_n - X_m|^p > \varepsilon^p) \quad \text{car } x \mapsto x^p \text{ croissante}$$

$$\leq \frac{\mathbb{E}[|X_n - X_m|^p]}{\varepsilon^p} \quad \text{par l'inégalité de Markov}$$

Donc $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy en probabilité, elle converge par conséquent en probabilité vers X $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, $\exists (X_{n_k})$ $X_{n_k} \xrightarrow{ps} X$

Il résulte alors du lemme de Fatou que

$$\int_\Omega |X|^p dP = \int_\Omega \lim_n |X_{n_k}|^p \int_\Omega \underline{\lim} |X_{n_k}|^p \leqslant \underline{\lim} \int_\Omega |X_{n_k}|^p$$

$$\leqslant \sup \int_\Omega |X_n|^p < +\infty$$

car $(|X_n|^p)$ est bornée dans L^1

Ainsi $X \in L^p$ ce qui achève de prouver iii)

iii) $\Rightarrow$ i)

Soit $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{E}[|X_n - X|^p] = \mathbb{E}[|X_n - X|^p \mathbb{1}_{\{|X_n - X| \leqslant \varepsilon^{1/p}\}}] + \mathbb{E}[|X_n - X|^p \mathbb{1}_{\{|X_n - X| > \varepsilon^{1/p}\}}]$$

$$\underset{(*)}{\leqslant} \varepsilon + 2^{p-1}(\mathbb{E}[|X_n|^p \mathbb{1}_{\{|X_n - X| > \varepsilon^{1/p}\}}] + \mathbb{E}[|X|^p \mathbb{1}_{\{|X_n - X| > \varepsilon^{1/p}\}}]$$

La famille $\{|X_n|^p, |X|^p, n \in \mathbb{N}\}$ étant équicontinue car uniformément intégrable, on peut trouver $\eta > 0$ tel que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_A |X_n|^p dP + \int_A |X|^p dP \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{p-1}} \quad \text{si } \mathbb{P}(A) \leq \eta.$$

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant en probabilité vers X, on a le résultat suivant : il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon^{1/p}) \leq \eta$$

Ainsi en prenant $A = \{|X_n - X| > \varepsilon^{1/p}\}$ on obtient

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{|X_n - X| > \varepsilon^{1/p}\}} |X_n|^p dP + \int_{\{|X_n - X| > \varepsilon^{1/p}\}} |X|^p dP \leq \frac{\varepsilon}{2^{p-1}}$$

En reprenant $(*)$ il s'ensuit

$$\mathbb{E}[|X_n - X|^p] \leqslant 2\varepsilon$$

Ainsi $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans L^p vers X.