230

Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

I/ Généralités

Définition 1. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes. On appelle série de terme général a_n, notée $\sum a_n$, la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\geq 0}$. On note par la suite $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Proposition 2 En posant $\lambda \sum a_n + \mu \sum b_n = \sum (\lambda a_n + \mu b_n)$, on munit l'ensemble des séries à termes dans $\mathbb{K}$ d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Déf 3 On dit que $\sum a_n$ converge quand $(A_n)_{n\geq 0}$, et on appelle somme de la série sa limite, et reste de rang n le terme $(\lim_{k\to+\infty} A_k - A_n)$ noté $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$

Prop 4 L'ensemble des séries convergentes ~~forment~~ un sous-espace vectoriel de l'ensemble des séries.

Prop 5 Si $\sum a_n$ converge alors (a_n) tend vers 0. Si tel n'est pas le cas la série est dite grossièrement divergente. Une série peut ne pas converger sans être grossièrement divergente

Expl 6 (Séries géométriques) Si $|a| < 1$ alors $\sum a^n$ est une série convergente de terme général $A_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$. Si $|a| \geq 1$, la série $\sum a^n$ est grossièrement divergente.

Prop 7 (Critère de Cauchy) : Si $\sum a_n$ converge alors $\forall \varepsilon, \exists N$ tel que $\forall q,p \in \mathbb{N}$, $p \geq N \Rightarrow \left|\sum_{k=p}^{p+q} u_k\right| \leq \varepsilon$ et réciproquement.

Corollaire 8 Une série $\sum a_n$ telle que $\sum |a_n|$ converge est une série dite absolument convergente. Toute série absolument convergente converge, la réciproque étant fausse.

Expl 9 (Série harmonique) La série $\sum \frac{1}{n}$ est une série divergente (non grossièrement divergente) ne vérifiant pas le critère de Cauchy : $\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$, $\forall n$.

II/ Séries à termes positifs

(on considère que $a_n \in \mathbb{R}_+, \forall n$)

Proposition 10 La série $\sum a_n$ converge ssi (A_n) est une suite bornée.

Th 11 (Règle de comparaison) Si on dispose de (u_n) (v_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$, alors :

$\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge

$\sum u_n$ diverge $\Rightarrow \sum v_n$ diverge

Expl 12 $\forall n \geq 2$, $0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$ et $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)} \longrightarrow 1$ donc $\sum \frac{1}{n^2}$ converge

Th 13 (Règle d'équivalence) Soient deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ telles que $u_n \sim v_n$, alors :

- les séries sont de même nature (convergentes ou divergentes)
- si elles convergent les restes sont équivalents
- si elles divergent les sommes partielles sont équivalentes

Expl 14 $\frac{1}{n^2 + (-1)^n\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n^2}$ donc $\sum \frac{1}{n^2+(-1)^n\sqrt{n}}$ converge.

Th 15 (Règle de domination) Si $u_n = O(v_n)$, alors

- Si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ converge et $\sum_{k=n}^{\infty} u_k = O_{n\to\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty} v_k\right)$
- Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge

On a une résultat analogue en remplaçant O par o.

Expl 16 $1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ converge

Expl 17 On définit (u_n) par $\begin{cases} u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \\ u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$. Alors $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$

Expl 18 La ~~série~~ série des $\sum \frac{1}{p_n}$ où (p_n) est la suite croissante des nombres premiers, diverge.

Prop 19 : (Comparaison série intégrale) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction positive, continue par morceau et décroissante. Alors $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\sum f(n)$ ont la même nature.

Exemple 20 (séries de Riemann) La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$) converge ssi $\alpha > 1$.

Exemple 21 : (séries de Bertrand) La série $\sum \frac{1}{n^\alpha \log^\beta n}$ converge ssi ($\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$)).

Dev 1 **Expl 22** : $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} + O(1/n^2)$

Th (Règle de Raabe-Duhamel) Soit (u_n) une suite de termes positifs vérifiant $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + \alpha/n + O(1/n^2)}$. Alors $\sum u_n$ converge ssi $\alpha > 1$.

Expl 23 : La série $\sum \frac{x(x+1)\dots(x+n)}{y(y+1)\dots(y+n)}$ converge ssi $y > x+1$ (on aura supposé $x, y > 0$).

Th 24 : (Règle de Cauchy) Si $(u_n^{1/n})$ a pour limite λ alors :

- $\sum u_n$ converge si $\lambda < 1$,
- $\sum u_n$ diverge si $\lambda > 1$.

Th 25 (Règle de d'Alembert) Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda$ alors

- $\sum u_n$ converge si $\lambda < 1$
- $\sum u_n$ diverge si $\lambda > 1$.

Expl 26 $\sum \operatorname{ch}(1/n)^{-n^3}$ converge :

Expl 27 $\sum \frac{n!}{n^n}$ converge.

III / Séries à termes quelconques

Remarque 28 : Les critères de Cauchy, de d'Alembert et de Raabe-Duhamel sont immédiatement des critères d'absolue convergence. Les critères suivants sont utilisés en dernier recours.

Th 29 (Critère des séries alternées) Soit (a_n) une suite alternée (càd $(-1)^n a_n$ est réel de signe constant). Si $|a_n|$ est décroissante et a 0 pour limite alors $\sum a_n$ est une série convergente, de reste R_n vérifiant $|R_n| \leq |a_{n+1}|$.

Expl 30 La série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.

Def 31 Une série convergente non absolument convergente est dite semi-convergente

Th 32 (Règle d'Abel) Soit $a_n = \alpha_n b_n$ vérifiant

- (α_n) est une suite positive, décroissante, tendant vers 0
- $\sum b_n$ est une série bornée

Alors $\sum a_n$ est une série convergente.

Expl 33. Si $b_n = (-1)^n$ on retrouve une série alternée.

Expl 34 $\sum \frac{\cos(nt)}{n^\alpha}$ converge, ainsi que $\sum \frac{\sin(nt)}{n^\alpha}$.

IV Associativité et commutativité de la somme d'une série, Produit de séries.

Th 35 (sommation par tranches) Soit $\sum a_n$ une série, $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante, on définit (b_n) par $b_0 = \sum_{k=0}^{\varphi(0)} a_k$ et $b_{n+1} = \sum_{k=\varphi(n)+1}^{\varphi(n+1)} a_k$.

Si $\sum a_n$ converge alors $\sum b_n$ aussi, et on a la réciproque dans les deux cas suivants :

- les a_n sont positifs
- les longueurs des tranches sont bornées ($\exists M > 0, \forall n, \varphi(n+1) - \varphi(n) < M$)

Dans les deux cas, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$

Expl 36 $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge. $\sum \frac{1}{\lfloor \ln_{10} n \rfloor !}$ converge.

Déf 37 On dit que $(\sum a_n)$ est commutativement convergente si pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, la série $\sum a_{\sigma(n)}$ converge

Th 38 Toute série absolument convergente est commutativement convergente, et la somme ne change pas en modifiant l'ordre des termes. La réciproque est ~~[illegible]~~ vraie comme le prouve le théorème suivant (pour les suites réelles)

Dev 2

Th 39 (de réarrangement de Riemann) Si $\sum a_n$ est une série semi convergente à termes réels, et si $S \in \mathbb{R}$, alors il existe une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que $\sum a_{\sigma(n)}$ soit semi-convergente, de somme S.

Déf 40 : Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries. Le produit de Cauchy de ces deux séries est la série $\sum c_n$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Th 41 : Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont deux séries absolument convergentes, alors leur produit de Cauchy $\sum c_n$ converge absolument et on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n\right)$$

Expl 42 : $\forall z \in \mathbb{C}$, on pose $\exp(z) = \sum \frac{z^n}{n!}$

Alors $\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $\exp(z+z') = \exp z \exp z'$. La fonction $t \mapsto \exp(it)$ est un morphisme de $\mathbb{R}$ dans $\{z, |z|=1\}$.

V Séries entières et calcul de somme

Déf 43 On appelle série entière toute série de fonction de la forme $\sum a_n z^n$ avec $z \in \mathbb{C}$ et (a_n) une suite complexe

Prop 44 (Lemme d'Abel) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $(a_n z_0^n)$ soit bornée. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, $\sum a_n z^n$ est absolument convergente

Déf 45 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Le nombre $R = \sup\{r \geq 0, (r^n a_n) \text{ bornée}\}$ est appelé rayon de convergence de la série. Il vérifie

- $\forall z, |z| < R$, $\sum a_n z^n$ converge absolument
- $\forall z, |z| > R$, $\sum a_n z^n$ diverge (grossièrement)

Th 46 (Théorème d'Abel) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ≥ 1 tel que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de cette série sur le disque unité, et on fixe $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$. On pose

$$\Delta_{\theta_0} = \{ z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \text{ et } \exists\ \rho > 0, \exists\, \theta \in [-\theta_0, \theta_0], z = 1 - \rho e^{i\theta} \}$$

Alors $\displaystyle \lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Expl 47 : $\pi = 4\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\right)$, $\ln(2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$