230

Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples

Dans cette leçon, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I- Généralités sur les séries:

Définition 1: Soit $(u_n)_n$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$, on appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_n$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, et on la note $\sum u_n$. $\forall n \in \mathbb{N}$, S_n est appelée somme partielle d'ordre n de la série.

Déf 2: On dit que $\sum u_n$ converge si $(S_n)_n$ converge, et on appelle somme de la série sa limite S, notée $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

Ex 3: (série géométrique) si $|a|<1$ $\sum a^n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$

Déf 4: On définit la suite des restes $(R_n)_n$ par : $\forall n \in \mathbb{N}$ $R_n = S - S_n$ où S est la somme de la série

Ex 5: (série géométrique) $\forall n \in \mathbb{N}$: $R_n = \frac{a^{n+1}}{1+a}$.

Prop 6: $\sum u_n$ converge $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Déf 7: On appelle série télescopique associée à $(a_n)_n$ la série $\sum u_n$ où $u_n = a_n - a_{n-1}$

Prop 8: La série télescopique est de même nature que la suite $(a_n)_n$. En cas de convergence, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (a_n - a_0)$.

Ex 9: $u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$

Thm 10: (Critère de Cauchy) Une série numérique $\sum u_n$ converge ssi :
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*, n \geq N \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| \leq \varepsilon$

Cex 11: (série harmonique)
$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$ le critère n'est pas vérifié.

Déf 12: Une série $\sum u_n$ est absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Thm 13: Toute série absolument convergente converge

Cex 14: Réciproque fausse : $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge mais pas absolument.

II- Séries à termes positifs

Lemme 15: Une série à termes positifs converge ssi $(S_n)_n$ est majorée.

Thm 16: (Règle de comparaison) Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \leq v_n$. Alors
1) $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge et $\sum u_n \leq \sum v_n$
2) $\sum u_n$ diverge $\Rightarrow \sum v_n$ diverge

Ex 17: $\forall n \geq 2$, $0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$ donc $\sum \frac{1}{n^2}$ converge
$\forall n \geq 1$, $0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge

Thm 18: (Règle d'équivalence) Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Alors
- les séries sont de même nature
- En cas de convergence, les restes sont équivalents
- En cas de divergence, les sommes partielles sont équivalentes

Ex 19: $\frac{1}{n^2+\sin(n^2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ donc $\sum \frac{1}{n^2+\sin(n^2)}$ converge

Thm 20: (Règle de domination) Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ telles que $u_n = O_{+\infty}(v_n)$. Alors si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ aussi et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O_{+\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$

Rem 21: On a un résultat similaire avec $u_n = o(v_n)$

Ex 22: $1-\cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1-\left(1-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$
d'où $\sum 1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)$ converge

a - Exemples de développements asymptotiques

DVPT 1

App 23: (série harmonique)
$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{2n}\right)$ où γ est la constante d'Euler

App 24: On définit la suite $(u_n)_n$ par : $\begin{cases} u_{n+1} = \sin(u_n) \\ u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$
Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$

App 25: (formule de Stirling)
$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}$

b - Liens séries/intégrales :

Prop 26: Soit $f : \mathbb{R}^+_n \to \mathbb{R}^+$ décroissante. Alors $(U_n)_n$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_0^n f(t)\,dt$ converge. En particulier $\sum f(n)$ et $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature. On a aussi $\forall n \geq 1$: $\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,dt \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t)\,dt$

Ex 27: $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ $\quad \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{2n^2}$ et $\frac{1}{2(n+1)^2} \leq R_n \leq \frac{1}{2n^2}$

Ex 28: (séries de Riemann)
$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$

Ex 29: (séries de Bertrand)
$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \log(n)^\beta}$ converge ssi $(\alpha > 1)$ ou $(\alpha = 1$ et $\beta > 1)$

III - Séries quelconques :

Thm 30: (Règle de Cauchy) Soit $(u_n)_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n \in \mathbb{K}$.
Si $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lambda$ existe, alors
1) si $\lambda < 1$ $\sum u_n$ converge absolument
2) si $\lambda > 1$ $\sum u_n$ diverge

Ex 31: $u_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$, $\lambda = e^{-1}$

Thm 32: Sous les mêmes hypothèses, si $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lambda$ existe, alors :
1) si $\lambda < 1$ la série converge absolument
2) si $\lambda > 1$ la série diverge.

Ex 33: $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = \frac{a^n}{n}$, $a \in \mathbb{R}^+_*$ $\quad \lambda = a$ donc converge si $a < 1$

Thm 34: (Règle d'Abel) Soit $\sum u_n$ une suite à valeurs dans un Banach. $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = \alpha_n v_n$ où
On suppose :
- $(\alpha_n)_n$ positive décroissante de limite nulle
- $\sum v_n$ est bornée par $M > 0$

Alors $\sum u_n$ converge et $|R_n| \leq M\alpha_{n+1}$

Cor 35 : (séries alternées) Soit $(a_n)_n$ une suite à termes positifs décroissante tendant vers 0. Alors la série $\sum (-1)^n a_n$ converge et $\forall n \in \mathbb{N}$ $|R_n| \leq a_{n+1}$

Ex 36 : $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 0$ est convergente.

Def 37 (Produit de Cauchy) On appelle produit de Cauchy de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ la série $\sum w_n$ où $\forall n \in \mathbb{N}$

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

Thm 38 : Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes de somme S et T. Si l'une converge absolument, le produit de Cauchy converge et sa somme vaut ST. Si les deux convergent absolument, le produit converge absolument.

Cex 39 : $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n+2)}$ termes généraux de séries convergentes, mais leur produit de Cauchy diverge.

Thm 40 : (Fubini) Soit $(a_{pq})_{p,q}$ une suite double. On a l'équivalence entre :
- la série double est convergente
- la série de terme général $B_n = \sum_{p+q=n} |a_{pq}|$ est convergente
- $\forall p$ (resp $\forall q$) $\sum_p a_{pq}$ (resp $\sum_q a_{pq}$) est absolument convergente, et la série de terme général $D_p' = \sum_{q=0}^{\infty} |a_{pq}|$ (resp $D_q' = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{pq}$) converge

Si ces conditions sont vérifiées :

$$\sum_{p,q \in \mathbb{N}} a_{p,q} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p+q=n} a_{pq} = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q} = \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q}$$

Ex 41 : $\forall p,q \in \mathbb{N}$ $a_{p,q} = p^{-q}$.

IV - Séries entières :

Def 42 : Une série entière est une fonction de la variable complexe z de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

Def 43 : Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est un réel $R \geq 0$ tel que : $\forall z \in \mathbb{C}$
- $|z| < R \Rightarrow \sum a_n z^n$ converge
- $|z| > R \Rightarrow \sum a_n z^n$ diverge.

Ex 44 :
- $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, $R = +\infty$
- $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, $R = 1$

Thm 45 : Si $R \neq 0$ la série entière converge normalement sur toute partie compacte incluse dans le disque de convergence.

Thm 46 : (Abel angulaire) Soit $f = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ≥ 1 telle que $\sum a_n$ converge. Soit $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on pose $\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1$ et $\exists \rho > 0, \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0], z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$

Alors $\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

Thm 47 : (Taubérien faible) Soit $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence 1 et f sa somme sur le disque unité. On suppose que $\exists S \in \mathbb{C}$, $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = S$. Si $a_n = o(\frac{1}{n})$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$

Ex 48 : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \arctan(x) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

DVPT 2

Références :

- Gourdon - Analyse
- Lelong-Ferrand & Arnaudiès
- El Amrani

Dev 1 : FGN Analyse tome 1

Dev 2 : Gourdon Analyse p. 249