229 : Fonctions monotones, fonctions convexes. Exemples et Applications

I Monotonie

1) Définition, premières propriétés

Définition 1 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. f est :
- croissante sur $I \iff \forall (x,y) \in I^2,\ x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
- décroissante sur $I \iff \forall (x,y) \in I^2,\ x \geq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- monotone sur $I \iff f$ est croissante ou décroissante sur I

Remarque : En remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes, on a les définitions de strictement croissant et décroissant.

Exemples : $x \to \log x$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

Propriété 2 (Stabilité)
- la somme et la composée de deux fonctions croissantes est croissante.
- le produit d'une fonction monotone par un scalaire est monotone
- si une fonction monotone admet une réciproque définie sur un intervalle, alors celle ci est de même monotonie

Exemple : $x \to \exp x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Remarque : Le produit de deux fonctions monotones n'est pas toujours monotone. Contre exemple : $f(x) = x$, $g(x) = x$ sur $[-1,1]$

2) Résultats importants

Théorème 3 Si f est croissante sur $I =]a,b[$, alors pour tout $x \in]a,b[$, $f(x^+)$ et $f(x^-)$ existent (f est dite réglée) et

$$\sup_{a<t<x} f(t) = f(x^-) \leq f(x) \leq f(x^+) = \sup_{x<t<b} f(t)$$

[RO p88]

De plus, si $a < x < y < b$, alors $f(x^+) \leq f(y^-)$

Propriétés 4 Soit f une application monotone définie sur I, alors
- (i) $f(I)$ est un intervalle $\iff f$ est continue sur I
- (ii) L'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable
- (iii) f est dérivable pp sur I

[TM p 230]

Contre exemple La fonction de Weierstrass $f(x) = \sum_{k \geq 0} a^k \cos(b^k \pi x)$, $a \in]0,1[$, $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$ est continue, nulle part dérivable et monotone sur aucun intervalle réel.

Propriété 5 Soit f continue sur I. Alors
f strictement monotone sur $I \iff f$ induit un homéomorphisme de I sur $f(I)$

Propriété 6 : Soit f dérivable sur I. alors
- f est croissante $\iff f'(x) \geq 0,\ \forall x \in I$
- f est strictement croissante sur $I \iff f$ est croissante sur I et $\overset{\circ}{\{x, f'(x) = 0\}} = \emptyset$

contre exemple (Escalier de Cantor)
Il existe une fonction K telle que $K'(x) \leq 0$ pp sur I mais K est croissante.

3) Analyse fonctionnelle

[Gou, p 229]

Théorème 7 (Dini) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions croissantes réelles continues et définies sur $I = [a,b]$.
Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f continue sur I, alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

Théorème 8 (Helly) [X ENS An 2 p 166]
Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions croissantes de $\mathbb{R} \to [-1,1]$.
Alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous suite convergeant simplement sur $\mathbb{R}$

II Convexité

1) Définition, premières propriétés

Définition 9 : Ensemble convexe
Soit E un espace affine, $A \subset E$ est convexe si $\forall x, y \in A$, $[x,y] \subset A$

Définition 10 Epigraphe
Soit Ω un convexe de $\mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. l'épigraphe de f est
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \quad x \in \Omega,\ y \geq f(x)\} = epi(f)$

Définition 11 Fonction convexe

- Soit Ω un convexe de de $\mathbb{R}$. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est convexe ssi $epi(f)$ est convexe
- f est concave si $-f$ est convexe.

Définition équivalente :

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ est convexe si $\forall (a,b) \in \Omega^2, \forall \lambda \in]0,1[$,

$f((1-\lambda)a + \lambda b) \leq \lambda f(b) + (1-\lambda) f(a)$ (Voir Annexe 1)

f est strictement convexe si l'inégalité est stricte.

exemple : E un espace euclidien

$x \to \|x\|$ est convexe. $x \mapsto \|x\|^2$ est

Propriété 12 : Caractérisation

soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe

$\iff \forall x_0 \in I, \quad \varphi_{x_0} : x \in I \setminus \{x_0\} \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est croissante

Propriété 13 Comparaison des pentes

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe et si $(a,b,c) \in I^3$ avec $a < b < c$, on a

$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c-b}$ (voir Annexe 2)

Propriété 14 Stabilité [Gourdon]

- La somme de fonctions convexes est convexe
- Le produit d'une fonction convexe par un scalaire positif est convexe
- Le sup d'une famille de fonctions convexes est convexe (si défini)
- f : convexe croissante. g : convexe. Alors $f \circ g$ est convexe
- Le produit de deux fonctions convexes positives croissantes est convexe

Application 15 Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Les valeurs propres de A sont réelles. Soit $\lambda_{max}(A)$ la plus grande valeur propre de A.

Alors $A \mapsto \lambda_{max}(A)$ est convexe [OA p29]

Définition 16 Une application positive f est dite log-convexe si $\log \circ f$ est convexe

Rq : Une application log convexe est convexe

Application 17 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telle que $f(x+1) = x f(x)$ [CL, p53]

$f(1) = 1$ et $\log f$ est convexe. Alors $f = \Gamma$

(Rappel : $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$)

Propriété 18 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et bornée.

Alors f est constante.

2) Régularité [G oo, p 141]

a) En dimension 1

$f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Propriétés 19

- f admet en tout point de $\mathring{I}$ des dérivées à gauche et à droite f_g' et f_d'.
- f est continue sur $\mathring{I}$
- f_g' et f_d' sont croissantes sur $\mathring{I}$ et $\forall x \in \mathring{I}$, $f_g'(x) \leq f_d'(x)$
- L'ensemble des points de non dérivabilité de f est dénombrable

Théorème 20 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est convexe

(ii) f' est croissante (voir annexe 3)

(iii) La courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes

Corollaire : $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable est convexe

$\iff \forall x \in I, f''(x) \geq 0$

b) dimension supérieure

On utilise la structure euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 21 Soit Ω convexe de $\mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable.

Alors les assertions suivantes sont équivalentes

(i) f est convexe

(ii) $\forall x, y \in \Omega^2 \quad f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$

(iii) $\forall x, y \in \Omega^2, \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0$

et si f est deux fois différentiable

(iv) $Hf(x)$ est positive

III Applications

1) Comparaison série – intégrale.

Proposition 22 $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ décroissante. Alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^n f(t)dt$ est convergente

la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ sont même nature

Application 23 : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma \in \mathbb{R}$.

2) Inégalités de convexité

Inégalité 24 (Arithmético géométrique) $(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}_+^n$

$$(x_1 \dots x_n)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$$

Inégalité 25 (Holder) $p, q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$\forall a_1 \dots a_n, b_1 \dots b_n \in \mathbb{R}_+^{2n}$, $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$

Inégalité 26 (Minkowsky)

$p \geqslant 1$, $(x_1 \dots x_n), (y_1 \dots y_n) \in \mathbb{R}_+^{2n}$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Application 27 $x \longmapsto \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$

Inégalité 28 (Jensen) Soit $f \in \mathcal{L}^1([0,1])$, à valeurs dans $I =]a,b[$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors $\int_0^1 f(x)dx \in I$ et

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)dx\right) \leqslant \int_0^1 \varphi(f(x))dx$$

Inégalité 29 (Kantorovitch) Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$
$0 < \lambda_1 \leqslant \dots \leqslant \lambda_n$ ses valeurs propres. Alors $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle Ax, x\rangle \langle A^{-1}x, x\rangle \leqslant \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}\right)^2 \|x\|^4$$

3) Optimisation

Propriété 30 Un minimum local d'une fonction convexe est global

Un minimum local d'une application strictement convexe est l'unique minimum global

Propriété 31 Soit $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ convexe, où $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert convexe.

Si f est deux fois différentiable, alors

x_0 minimum global de f $\iff$ $df(x_0) = 0$

x_0 unique minimum global de f $\iff$ $d^2f(x_0)$ est définie positive

Méthode du gradient à pas optimal [DVP]

On propose un algorithme pour minimiser
$f : x \in \mathbb{R}^n \to \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle$ où $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$.

Méthode de Newton

Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(c) < 0 < f(d)$.

(x_n) définie par $\begin{cases} x_0 \in [c,d] \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$

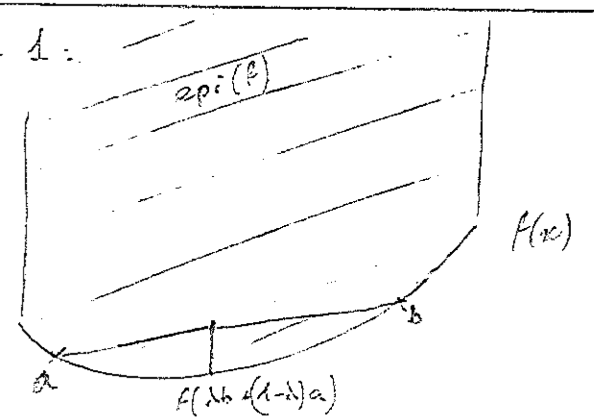
Proposition : Si f est convexe, la suite (x_n) converge quadratiquement vers l'unique point d'annulation de f.

4) Propriétés géométriques

Théorème 32 (John Loewner). Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$

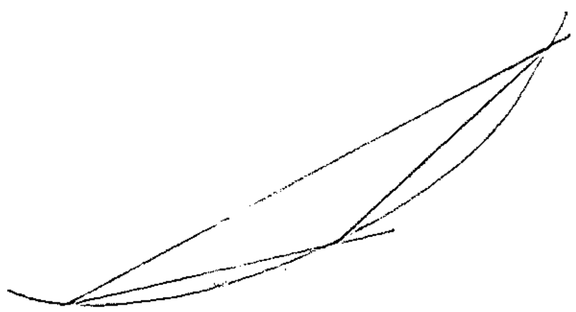
Alors il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K [DVP]

Annexe 1 :



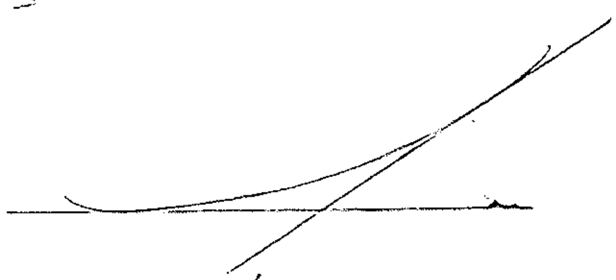
Convexité : Équivalence des définitions

Annexe 2



Convexité : comparaison des pentes

Annexe 3



La courbe est au dessus de ses tangentes

[CL] Chambert Loir Exercices pour l'Agrégation
[HU] Hiriart Urruty Optimisation
[OA] Objectif Agrégation
[XENS An 2]
[GOU] Gourdon, Analyse
[TM] Tissier Mialet, Analyse à une variable réelle
[Ru] Rudin, Principes d'Analyse mathématique

Ellipsoïde de John-Loewner

Théorème : soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Il existe une unique ellipsoïde de volume minimal parmi celles contenant K

Preuve :

I) : expression du volume d'une ellipsoïde

II) : existence

III) : unicité

On notera Q l'ensemble des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$; Q^+ les positives ; Q^{++} les définies positives.

Pour $q \in Q$, on notera M_q sa matrice dans la base canonique et $D_q = \det M_q$ le déterminant de sa matrice dans toute base orthonormée

Pour $q \in Q^{++}$ on note $\mathcal{E}_q$ l'ellipsoïde $\{x \in \mathbb{R}^n / q(x) \leq 1\}$ et V_q son volume $\int_{\mathcal{E}_q} dx$

I) Soit $q \in Q^{++}$, $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de diagonalisation de M_q

$$q\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2$$

alors $D_q = \prod_{i=1}^n a_i$ et

$$V_q = \int_{a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2 \leq 1} dx_1 \dots dx_n$$

$$= \int_{y_1^2 + \dots + y_n^2 \leq 1} \left(\frac{1}{\sqrt{D_q}}\right) dy_1 \dots dy_n$$

$$= \frac{V_0}{\sqrt{D_q}} \quad \text{où } V_0 \text{ est le volume de } B(0,1)$$

On cherche donc à montrer que $q \mapsto D_q$ a un unique maximum sur $\mathcal{A} = \{q \in Q^+ / \forall x \in K \; q(x) \leq 1\}$

II) Soit $N : q \mapsto \sup_{x \in B(0,1)} |q(x)|$. C'est une norme sur Q

On montre que $\mathcal{A}$ est compact pour N :

$\mathcal{A}$ est fermé en tant qu'intersection de fermés

soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$ tels que $B(a,r) \subset K$; soit $q \in \mathcal{A}$

soit x : $\|x\| < r$

alors $\sqrt{q(x)} = \sqrt{q(x+a-a)} \leq \sqrt{q(x+a)} + \sqrt{q(a)} \leq 2$

donc $q(x) \leq 4$

d'où $N(q) \leq \frac{4}{r^2}$; $\mathcal{A}$ est borné

$\mathcal{A}$ est donc compact.

De plus, si $M \in \mathbb{R}$ est tel que $K \subset B(0,M)$, alors $x \mapsto \frac{\|x\|^2}{M^2} \in \mathcal{A}$

$\mathcal{A}$ est compact non-vide donc $q \mapsto D_q$, qui est continue, admet un maximum sur $\mathcal{A}$.

III) : soient q, q' deux tels maximums distincts

$\mathcal{A}$ est convexe comme intersection de convexes, donc $q_0 = \frac{1}{2}(q+q') \in \mathcal{A}$

$D_q \geqslant D_{x \mapsto \frac{\|x\|^2}{M^2}} > 0$ donc $q \in Q^{++}$, et $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$, $\exists \begin{cases} D = diag(a_1, \dots, a_n) \\ D' = diag(b_1, \dots, b_n) \end{cases}$

tels que $\begin{cases} M_q = P D {}^tP \\ M_{q'} = P D' {}^tP \end{cases}$

donc $M_{q_0} = P \begin{pmatrix} \frac{a_1+b_1}{2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{a_n+b_n}{2} \end{pmatrix} {}^tP$

d'où $D_{q_0} = (\det P)^2 \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i+b_i}{2} > (\det P)^2 \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/2} \left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right)^{1/2}$ par stricte concavité de ln

$D_{q_0} > D_q$: c'est absurde

Il existe donc une unique ellipsoïde convenable