224 : Exemples de Développements Asymptotiques de suites et de fonctions.

I) Cadre/Définitions

définition 1 Relations de Comparaisons, notations de Landau.

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ soient f et g deux fonctions positives définies sur $D \subset \mathbb{R}$ tel que D contienne un voisinage de a, sauf éventuellement a. On note :

- $f = O_a(g)$ si $\exists m > 0, \exists v \in V(a), \forall x \in v \cap D, f(x) < m g(x)$.
- $f = o_a(g)$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists v \in V(a), \forall x \in v \cap D, f(x) < \varepsilon g(x)$
- $f \sim_a g$ si $f - g = o(g)$

Ces définitions s'étendent aux fonction de $\mathbb{C} \to \mathbb{R}^+$ pour $a \in \mathbb{C}$ ainsi qu'aux suites pour $a = +\infty$.

exemple 2 : pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

- $n^\alpha = o_\infty(2^n)$
- $e^z - 1 - z = o_0(z)$

définition 3 : Echelles de comparaisons (même notations qu'en definition 1)

Une échelle de comparaison en a est un ensemble $\mathcal{E}$ de fonctions positives définies sur D, totalement ordoné pour la relation d'ordre $\cdot = o_a(\cdot)$.

exemple 4 :

- $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ en 0
- $\{n^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ en $+\infty$
- $\{x^\alpha (\log x)^\beta e^{P(x)} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}^2, P \text{ polynôme}\}$ en $+\infty$

définition 5 : Développement asymptotique.

Pour $\mathcal{E}$ une échelle de comparaison en a sur D, pour f une fonction positive définie sur D, un développement asymptotique de f en a est une écriture

$c_1 g_1 + c_2 g_2 + \dots + c_k g_k$ avec $(c_i)_{i \le k} \in (\mathbb{R}^*)^k$, $(g_i)_{i \le k} \in \mathcal{E}^k$.

Vérifiant

- $f = c_1 g_1 + c_2 g_2 + \dots + c_k g_k + o(g_k)$
- $\forall i, 1 \leq i \leq k-1, g_i = o(g_{i+1})$

Un développement asymptotique est unique (au choix de k près)

remarque 6 : Dans la suite, les échelles de comparaison seront généralement implicites.

exemple 7 : $\log(x)\left(x + 1 + \frac{1}{x}\right) = x \log(x) + \log(x) + o(\log(x))$

$\sin(1/n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

II Développements limités et formule de Taylor-Young

Dans cette partie, I désigne un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$, tel que $0 \in \overline{I}$.

définition 10 : Un développement limité est un développement asymptotique en 0 pour l'échelle de comparaison $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, c'est donc une écriture de la forme :

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_k x^k + o(x^k).$$

remarque 11 : On peut toujours se ramener à étudier f en 0 en posant $\tilde{f}(x) = f(a+x)$ si a est fini, ou $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ sinon.

exemple 12 : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$.

théorème 13 : Formule de Taylor-Young :

Si f est n fois dérivable en 0, alors f admet le développement limité à l'ordre n suivant :

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + x^2 \frac{f^{(2)}(0)}{2!} + \dots + x^n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + o(x^n)$$

exemple 14 :

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$

$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o(x^5)$

remarque 15 : Taylor-Young donne une condition suffisante à l'existence d'un Développement Limité, mais pas nécessaire:

exemple 16 : $x^3 \sin(1/x) = 0 + 0x + 0x^2 + o(x^2)$ mais n'est pas deux fois dérivable.

III Opérations sur les développements limités

remarque 17: On peut sommer, multiplier et composer les développements limités:

exemple 18: $\frac{\tan x}{1-x} = \left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)\left(1+x+x^2+o(x^3)\right)$
$= x+x^2+\frac{4}{3}x^3+o(x^3)$

propriété 19: On peut intégrer terme à terme les développements limités, si f est dérivable n fois, on peut dériver terme à terme son développement limité à l'ordre n.

exemple 20: $\ln(1-x) = -x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\dots+\frac{(-1)^n}{n}x^n+o(x^n)$

$x^3\sin(\frac{1}{x})$ est un contre-exemple du deuxième point de la propriété 19.

remarque 21: On obtient ainsi les développements limités de la plupart des fonctions usuelles comme tan, sh, ch, th, ...

proposition 22: Soient f et g positives définies sur $[a,+\infty[$.
si $f=o(g)$, alors
si $\int_a^x g(t)dt$ diverge en $+\infty$, alors $\int_a^x f(t)dt = o\left(\int_a^x g(t)dt\right)$
sinon $\int_x^{+\infty} f(t)dt = o\left(\int_x^{+\infty} g(t)dt\right)$
On a un résultat similaire sur les séries : si $u_n=o(v_n)$, alors
si $\sum_{i=0}^{n} v_i$ diverge, alors $\sum_{i=0}^{n} u_i = o\left(\sum_{i=0}^{n} v_i\right)$
sinon $\sum_{i=n}^{+\infty} u_i = o\left(\sum_{i=n}^{+\infty} v_i\right)$

exemple 23:
$\int_2^x \frac{1}{\ln(t)}dt = \frac{x}{\log(x)}+\frac{1!\,x}{(\log(x))^2}+\dots+\frac{(k-1)!\,x}{(\log(x))^k}+o\left(\frac{x}{(\log x)^k}\right)$
$\sum_{i=1}^{n}\cos(\frac{1}{i}) = n-\frac{\pi^2}{12}+o(1)$

IV Développements asymptotiques d'intégrales à paramètres.

Théorème 24: Méthode de Laplace

DEV 1

Soient a,b avec $a<b\leqslant+\infty$, soit $\varphi\in C^2([a,b[,\mathbb{R})$, soit $f:[a,b[\to\mathbb{C}$, soit $x_0\in\mathbb{R}$, si
- $e^{-x_0\varphi}f\in L^1([a,b[)$
- f continue en a avec $f(a)\neq 0$
- $\varphi'>0$ sur $]a,b[$

alors pour $x\geqslant x_0$, $F(x)=\int_a^b f(t)e^{-x\varphi(t)}dt$ converge et
- si $\varphi'(a)>0$, $F(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{e^{-x\varphi(a)}f(a)}{\varphi'(a)\,x}$
- si $\varphi'(a)=0$ et $\varphi''(a)>0$, $F(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}}\,\frac{e^{-x\varphi(a)}f(a)}{\sqrt{x}}$

exemple 25:
- Formule de Stirling : $\Gamma(x+1)\underset{x\to+\infty}{\sim}\left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{2\pi x}$
- $\int_0^{+\infty} e^{-x(2t+\sin(t))}dt \underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{3x}$

Théorème 26 : Méthode de la phase stationnaire :
Soient a,b avec $a<b<+\infty$, soit $\varphi\in C^2([a,b],\mathbb{R})$
soit $f\in C^0([a,b],\mathbb{C})$ dérivable sur $(a,b]$.
On pose $F(x)=\int_a^b f(t)e^{ix\varphi(t)}dt$
- Si φ n'a aucun point stationnaire (φ' n'a aucun 0), alors
$F(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{f(b)e^{ix\varphi(b)}}{i\lambda\varphi'(b)}-\frac{f(a)e^{ix\varphi(a)}}{i\lambda\varphi'(a)}$
- Si φ a un seul point stationnaire c ($\varphi'(d)=0 \Leftrightarrow d=c$) sur $(a,b]$, et si $f(c)\neq 0$, alors
  + si $\varphi''(c)>0$, $F(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{2x\varphi''(c)}}\,f(c)\,e^{i(x\varphi(c)+\frac{\pi}{4})}$
  + si $\varphi''(c)<0$, $F(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{-\pi}{2x\varphi''(x)}}\,f(c)\,e^{i(x\varphi(c)-\frac{\pi}{4})}$

exemple 27

- $\int_0^1 \cos(t) e^{ix\,ch(t)} dt \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{i(x+\frac{\pi}{4})}$.
- $\int_0^1 e^{ixt^2} dt \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4x}}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

Théorème 28 : Théorème Limite Centrale.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, indépendantes, identiquement distribuées telle que $E(|X_1|^2) < +\infty$.
On suppose de plus $E(X_1)=0$ et $V(X_1)=1$.
Alors $\frac{X_1+\dots+X_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$.

V Développements asymptotiques de suites

Théorème 29 : Comparaison Série/Intégrales

Soit f décroissante sur $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}^+$ mesurable, alors pour $n\in\mathbb{N}$
$$\sum_{i=0}^{n} f(i) \geqslant \int_0^{n+1} f(t)\,dt \geqslant \sum_{i=1}^{n+1} f(i)$$
En particulier $\sum_{i=1}^{n} f(i)$ converge si et seulement si $\int_0^{x} f(t)\,dt$ converge.

Exemple 30 : En utilisant des critères d'équivalence, on trouve :

- $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$
- $n! \quad \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1+\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$
- $\binom{2n}{n} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$

Proposition 31 : Soit f définie au voisinage de 0 telle que $f(x) = x - ax^{\alpha} + o(x^{\alpha})$ avec $a>0, \alpha>1$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
- si u_0 est suffisament proche de 0, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
- Dans ce cas, $u_n \sim ((\alpha-1)a\,n)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ (pour $u_0 \neq 0$)

DEV 2

Exemple 32

- si $u_{n+1} = \sin(u_n)$, $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$
- si $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$, $u_n = \frac{2}{n} + \frac{\ln n}{3n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$

DEV 1

Théorème 33 : Méthode de Newton

Soit $f\in C^2([c,d],\mathbb{R})$ s'annulant en $a\in]c,d[$ avec $f'(x)>0$ sur $[c,d]$. On définit $F : x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Alors,
- $\exists \alpha>0$ tel que $I=[a-\alpha, a+\alpha]$ est stable par F.
alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0\in I$, $u_{n+1}=F(u_n)$ converge vers a et $|u_{n+1}-a| \leqslant C|u_n-a|^2$ pour une constante C.
- Si de plus $f''(x)>0$ sur $[c,d]$, alors on peut prendre $I=[a,d]$ et alors u_n est strictement décroissante (si $u_0\neq a$) et
  - $0 \leqslant u_{n+1}-a \leqslant C(x_n-a)^2$
  - $u_{n+1}-a \sim \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(u_n-a)^2$

exemple 34 : pour $f(x) = x^2-2$ sur $[1,2]$,
$F(x) = x - \frac{x^2-2}{2x}$ et $|x_n - \sqrt{2}| \leqslant 2\left(\frac{1}{4}\right)^{2^n}$

Références : FGN, Rouvière, Dieudonné, Gourdon