223 : suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

Motivations : La notion d'itération est utilisée par Archimède pour approcher la valeur de π. Gauss et Cauchy (XIX° siècle) formalisent les concepts de suite, de limite, et de convergence.

Cadre : Sauf précision contraire, les suites considérées sont à valeurs dans $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I] Convergence

Déf 1 : une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geq n_0,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$$

- une suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x+iy$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ si
  - (i) $z_n = x_n + i y_n$ où $(x_n)_{\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{\mathbb{N}}$ sont des suites réelles.
  - (ii) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.
  - (iii) $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y.

ex 2 : $\left(u_n = \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 ; $\left(v_n = e^{in}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

prop 3 : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in K$ et $f : k \to k$ est continue en ℓ, alors la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$.

ex 4 : $f : x \mapsto x^2$ est continue en zéro donc $\left(f(u_n) = \frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $f(0) = 0$.

prop 5 : l'espace des suites convergentes dans k est un espace vectoriel sur k.

Déf 6 : • une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite monotone si, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(u_{n+1} - u_n)$ est du même signe que $(u_{n+2} - u_{n+1})$.

• une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée s'il existe $M > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |z_n| \leq M.$$

Prop 7 : une suite réelle monotone bornée est convergente.

prop 8 : Soient $(a_n)_{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{\mathbb{N}}$ deux suites réelles > 0 telles que :

(i) $\forall n \in \mathbb{N},\quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$.

(ii) (b_n) est convergente.

Alors (a_n) est convergente.

ex 9 : $(n)_{\mathbb{N}}$ est monotone, non-bornée ; $((-1)^n)_{\mathbb{N}}$ est bornée, non-monotone.

Déf 10 : $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans k si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ /\ \forall p,q \geq n_0,\ |u_p - u_q| < \varepsilon$$

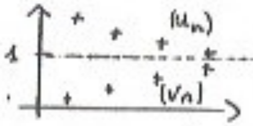
prop 11 : Toute suite de Cauchy dans k converge.

Déf 12 : deux suites réelles $(u_n)_{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{\mathbb{N}}$ sont adjacentes si :

(i) $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est décroissante et $(v_n)_{\mathbb{N}}$ est croissante.

(ii) $|u_n - v_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

ex 13 : $\left(1+\frac{1}{n}\right)_{\mathbb{N}}$ et $\left(1-\frac{1}{n}\right)_{\mathbb{N}}$ sont adjacentes.



prop 14 : deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

App 15 : critère spécial des séries alternées.

Déf 16 : Soient $(u_n)_{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{\mathbb{N}}$ deux suites réelles

- $u_n \sim v_n \iff u_n - v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
- $u_n = o(v_n) \iff v_n > 0$ et $\frac{u_n}{v_n} \overset{\infty}{\longrightarrow} 0$
- $u_n = O(v_n) \iff v_n > 0$ et $\exists C \geq 0 \ /\ \forall n\in\mathbb{N},\ \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leq C$

ex17 : $\frac{1}{n+(-1)^n} \sim \frac{1}{n}$

App18 : Formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

App19 : Convergence géométrique dans le théorème de point fixe de Picard : $|x_n - \ell| = O(k^n)$

II] Valeurs d'adhérence.

Déf 20 : la borne supérieure d'une suite réelle est le plus petit de ses majorants $\sup_{n\geq 0}(u_n) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

La borne inférieure d'une suite réelle est le plus grand de ses minorants. $\inf_{n\geq 0}(u_n) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

ex 21 : $\sup_{n\geq 0}(n) = +\infty$; $\inf_{n\geq 0}((-1)^n) = -1$

Déf 22 : • $\liminf_{n\infty}(u_n) := \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq k}(u_n) \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$

• $\limsup_{n\infty}(u_n) := \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq k}(u_n) \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$

ex 23 : $u_0 = -4$; $u_{n\geq 1} = \frac{1}{n}$. Alors $\liminf_{n\infty}(u_n) = -4$; $\limsup_{n\infty}(u_n) = 0$

prop 24 : $\liminf_{n\infty}(u_n) \leq \limsup_{n\infty}(u_n)$ et l'égalité caractérise la convergence.

Déf 25 : une sous-suite de (u_n) est une suite $(u_{\varphi(n)})$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.

ex26 : La suite (u_{2n}) est une sous-suite de (u_n)

App27 : Critère d'Hadamard pour les séries entières $\frac{1}{R} = \limsup_{n\infty} |a_n|^{1/n}$

Déf 29 : une valeur d'adhérence est la limite d'une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$

ex30 : $\mathrm{Adh}((-1)^n) = \{-1, +1\}$; $\mathrm{Adh}(e^{in}) = \mathbb{U}$

$\liminf_{n\infty}(u_n), \limsup_{n\infty}(u_n) \in \mathrm{Adh}(u_n)$

prop31 : Si $u_n \xrightarrow[n\infty]{} \ell$, Alors $\mathrm{Adh}(u_n) = \{\ell\}$

Rq 32 : la réciproque est fausse, sauf pour une suite de Cauchy.

Contre-exemple : $u_n = n + (-1)^n . n$

Thm 33 : (Bolzano-Weierstrass). De toute suite bornée de $\mathbb{K}$ on peut extraire une sous-suite convergente.

App 34 : Principe des compacts décroissants.

III] Applications importantes

* Quelques familles de suites classiques :

• Suites arithmétiques. $u_{n+1} = u_n + a$, $a \in \mathbb{K}$.
On a alors $u_n = u_0 + n.a$ pour $n \in \mathbb{N}$.

• Suites géométriques. $u_{n+1} = q.u_n$, $q \in \mathbb{K}$.
On a alors $u_n = q^n . u_0$. $|q| < 1 \Rightarrow u_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$

Déf 35 : suites récurrentes d'ordre 1 $u_{n+1} = f(u_n)$

prop 36 : Si une suite récurrente (u_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{K}$, alors ℓ est un point fixe de f : $f(\ell) = \ell$.

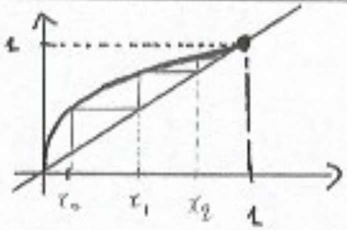
prop37 : Si $I \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle stable pour f et que $u_0 \in I$,

(i) Si f est croissante, $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est monotone.

(ii) Si f est décroissante, $(u_{2n})_{\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{\mathbb{N}}$ sont monotones, de monotonie opposée.

ex 38 : $f : x \mapsto \sqrt{x}$

$I = [0;1]$. Alors $x_n \xrightarrow[n\infty]{} 1$



App 39 : Méthode de Newton

$I = [c,d]$. $x_0 \in I$. $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

(i) On suppose que $f \in C^2(I,\mathbb{R})$, $f(a) = 0$ et $f'(a) \neq 0$. Alors il existe $\eta > 0$ tel que pour $|a - x_0| < \eta$, la suite $(x_n)_{\mathbb{N}}$ converge vers a hypergéométriquement : il existe $k \in [0;1[$ tq :

$$x_n = a + O(k^{2^n})$$

(ii) On suppose, de plus, f convexe sur I. Alors le résultat est vrai pour tout $x_0 \in [a;d]$

DVP 1

IV] Convergence au sens de Césàro

Thm 40 : (Césàro)

Si $u_n \xrightarrow[n\infty]{} \ell$, alors $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \xrightarrow[n\infty]{} \ell$.

Rq 41 : le résultat est vrai pour $\ell = \pm\infty$

ex 42 : $u_n = (-1)^n$ converge en moyenne vers 0.

Thm 43 : (réciproque partielle)

Si la suite $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ converge en moyenne vers ℓ, et que $u_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$, avec $a_n = O(\frac{1}{n})$

Alors $u_n \xrightarrow[n\infty]{} \ell$

DVP 2

App 44 : Soit $a_n > 0$ une suite réelle tq :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n\infty]{} \ell$$

Alors $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow[n\infty]{} \ell$

App 45 : Régularisation du noyau de Dirichlet

- $\|D_N\|_{L^1} \xrightarrow[N\infty]{} +\infty$ et $\|K_N\|_{L^1} = 1$
- si $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$ et que sa série de Fourier converge simplement, alors $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{int}$

Références :
- Gourdon - Analyse (voir le thm taubérien de Hardy - problème 22 page 289).
- Cassini Analyse 1 (réciproque partielle de Césàro)
- Rombaldi (Méthode de Newton).
- Combes - suites et séries.