222

Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.

On n'étudiera que des équations d'ordre 1 ou 2 en espace.

I. Généralités

1) Définitions et premiers exemples

Soit $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ suffisamment régulière pour que les expressions qui suivent aient du sens.

Déf 1 : On appelle <u>équation aux dérivées partielles linéaires</u> (EDPL) d'ordre 2 une équation de la forme :

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + e(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + f(x,y)u + g(x,y) = 0$$

avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.

Si $(a,b,c) = (0,0,0)$ l'EDP est dite d'ordre 1.

Déf 2 : l'équation est <u>homogène</u> si $g = 0$.

Déf 3 : On appelle <u>problème aux frontières</u> une EDP munie de conditions sur le bord complet du domaine sur lequel elle est posée.

Ex 4 :
$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u}{\partial t} + a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \Omega \times \mathbb{R}^*_+ & \text{(équation de la chaleur)} \\ u(x_0, t) = u_0(t) \text{ donné} \end{cases}$$

Déf 5 : On appelle <u>problème de Cauchy</u> une EDP où pour au moins une variable (généralement le temps t) les conditions ne portent que sur une partie du bord du domaine sur lequel on connaît la valeur de la fonction et de ses dérivées de degré inférieur à l'ordre de l'équation.

Ex 6 :
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ sur } \Omega \times \mathbb{R}^*_+ & \text{(équation des ondes)} \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}^*_+ \\ u(t=0) = u_0 \text{ et } \partial_t u(t=0) = u_1 \text{ dans } \Omega \end{cases}$$

c'est un problème aux frontières en espace et de Cauchy en temps.

Déf 7 : Soit une EDPL sur un domaine Ω avec éventuellement des conditions aux limites ou initiales. On dit que le problème est bien posé au sens de Hadamard si il existe une unique solution qui dépend des données de façon continue.

2) EDPL d'ordre 1

Dans ce paragraphe on étudie les équations de la forme :

$\partial_t u + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\partial_i u = f$ telles que $a_i(t,x)$ sont des fonctions réelles continues et bornées ainsi que leurs dérivées d'ordre 1 sur $\Omega_T = [0,T] \times \mathbb{R}^n$.

On associe le champ de vecteurs défini sur Ω_T par

$$(t,x) \longmapsto (1, A(t,x)) = (1, a_1(t,x), \dots, a_n(t,x))$$

Prop 8 : pour tout $(t_0, y_0) \in \Omega_T$, il existe une unique courbe $t \longmapsto (t, X(t))$ de classe C^1 sur $[0,T]$ telle que $X(t)$ soit solution du système différentiel
$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt}(t) = A(t, X(t)) \text{ sur } [0,T] \\ X(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Déf 9 : La courbe $t \longmapsto (t, X(t))$ est appelée courbe caractéristique issue de (t_0, y_0).

Thm 10 : Soit $h \in C^1_b(\mathbb{R}^n)$ et soit le pb de Cauchy
$$\begin{cases} \partial_t u + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\partial_i u = 0 \text{ sur } \Omega_T \\ u(0,\cdot) = h \text{ sur } \mathbb{R}^n \end{cases}$$
le problème a une unique solution donnée par $u(t,x) = h \circ \Phi(t,x)$ où $\Phi(t,y) = (t, X(t,y))$.

Ex 11 : On considère sur $[0,T] \times \mathbb{R}$ l'équation
$$\begin{cases} \partial_t u + t x \partial_x u = 0 \\ u(0,x) = h(x) \end{cases}$$
avec $h \in C^1_b(\mathbb{R})$. La solution u est définie sur $[0,T] \times \mathbb{R}$ par $u(t,x) = h(x e^{-t^2/2})$.

B) Classification des EDPL d'ordre 2

[DG] Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et l'EDPL d'ordre 2 d'inconnue u :

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + e(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + f(x,y)u + g(x,y) = 0$$

Déf 12. On dit que l'équation est :

- **elliptique** si $b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y) < 0$
- **parabolique** si $b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y) = 0$
- **hyperbolique** si $b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y) > 0$

[DG] **Ex 13.** l'équation des ondes $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ est hyperbolique — mêmes diff qualitatives

[Po] l'équation de la chaleur $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$ est parabolique

l'équation de Laplace $\Delta u = 0$ est elliptique

[DG] p18 **Rmq 14.** Le caractère hyperbolique, parabolique ou elliptique d'une EDPL du second ordre n'est pas modifié par un changement de variable.

II. Exemples d'EDPL hyperboliques

1) Préliminaires : équation de transport

[DG] p8 Considérons un contaminant de concentration $u(x,t)$ dans un fluide en mouvement de vitesse $a(x)$.

Par la conservation de la matière : $\partial_t u + \operatorname{div}(ua) = 0$.

On se place en dimension 1 dans l'espace et on s'intéresse au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \partial_t u + a(x)\partial_x u = 0 & \forall x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

avec a et $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$.

[DG] p12 • **Cas a = constante**

Prop 15. Les courbes caractéristiques vérifient $\begin{cases} X'(t) = a \\ X(0) = x \end{cases}$ donc $X(t) = x + at$.

Thm 16. $u : (x,t) \mapsto u_0(x - at)$ est l'unique solution de classe C^1 de (*)

• **Cas a variable**

[DG] p14 **Ex 17.** Pour $a(x) = x$, les courbes caractéristiques ont pour équation : $\ln(x) - t = cste$ donc $xe^{-t} = k \in \mathbb{R}$.

La solution de (*) est donc $u(x,t) = u_0(xe^{-t})$.

2) Équation des ondes

On souhaite modéliser la propagation des ondes à vitesse finie.

[DG] p66 **Déf 18.** On appelle équation des ondes, l'équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & \text{où } c \text{ est la vitesse de la lumière dans le vide, et } u_0, v_0 \text{ sont resp } C^2(\mathbb{R}) \text{ et } C^1(\mathbb{R}) \\ u(x,0) = u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x) \end{cases}$$

[DG] p68 **Thm 19.** La solution de l'équation des ondes unidimensionnelle est donnée par la formule de d'Alembert :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_0(x-ct) + u_0(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(y)\,dy \in C^2(\mathbb{R}^2)$$

[DG] p73 **Rmq 20.** La formule de d'Alembert met en évidence deux ondes solutions : l'une se propageant à la vitesse c et l'autre à la vitesse $-c$.

III. Exemples d'EDPL elliptiques

1) Lien avec l'harmonicité

On souhaite résoudre $\Delta u = 0$ $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\right)$

[AH] **Déf 21.** Une fonction $u : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite harmonique sur Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ si u est de classe C^2 et vérifie $\Delta u = 0$.

[AH] **Ex 22.** $(x,y) \mapsto \log\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ est harmonique sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$

[AH] **Coro 23.** La partie réelle d'une fonction holomorphe est harmonique. Ainsi ces fonctions sont solutions de l'EDPL elliptique $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

[AH] **Déf 24.** Soit f une fonction continue sur un ouvert U.

On dit que f possède la propriété de la moyenne si pour tout $D(a,r)$ tel que $\overline{D(a,r)} \subset U$, on a :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\,dt$$

[FGN] p. 121 **Thm 25 :** Une fonction est harmonique ssi elle vérifie la propriété de la moyenne.

[FGN] p. 52 **Thm 26 :** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux et 2π-périodique. Alors il existe une unique fonction $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ vérifiant :

1) u est bornée et continue
2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(x,0) = f(x)$
3) $\forall y > 0$, $x \mapsto u(x,y)$ est 2π-périodique
4) $u_{|\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*}$ est $\mathcal{C}^\infty$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

Rmq 27 : Ce théorème nous permet de montrer, sous certaines conditions, l'existence et l'unicité d'une solution à $\Delta u = 0$.

2) Approche variationnelle

Sobolev

[HIR] p. 30, 106 **Def 28 :** • $H^1 = \{u \in L^2(\Omega) \,/\, \nabla u \in (L^2)^n\}$
• $\|u\|_{H^1}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2$
• $H_0^1 = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1}$

[HIR] p. 107 **Thm 29 :** (Inégalité de Poincaré)
$\exists C > 0$ tel que $\forall u \in H_0^1$, $\|u\|_{L^2}^2 \leq C \|\nabla u\|_{L^2}^2$

[HIR] p. 106, p. 107 **Prop 30 :** H^1 et H_0^1 sont des Hilbert pour la norme hilbertienne $\|\cdot\|_{H^1}$.

[BRE] p. 84 **Thm 31 :** (Lax-Milgram) Soit H un espace de Hilbert.
Soit $a : H \times H \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une forme bilinéaire continue coercive.
Alors $\forall \varphi \in H'$, $\exists !\, u \in H$ tel que $a(u,v) = \varphi(v) \; \forall v \in H$.
Si de plus a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété : $u \in H$ et :

$$\frac{1}{2} a(u,u) - \varphi(u) = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2} a(v,v) - \varphi(v) \right\}.$$

DVPT

[BRE] p. 138 **App 32 :** (Solution au problème de Sturm-Liouville)
Soit $f \in L^2(0,1)$, $\alpha \in L^\infty(0,1)$ et $\beta \in \mathcal{C}^1(0,1)$ tels que $\alpha(x) \geq \alpha_{min} > 0$ pour $x \in [0,1]$, $|\beta(x)|^2 \leq 2\alpha_{min} \; \forall x \in [0,1]$. Alors $\exists !\, u \in H_0^1(0,1)$ tel que : $-(\alpha u')' + \beta u' + u = f$ dans $\mathcal{D}'(0,1)$.

IV. Exemple d'EDPL paraboliques

On cherche à modéliser la température $u(t,x)$ dans une barre. On va résoudre l'équation de la chaleur sur un anneau.

[FGN] p. 3 **Thm 33 :** Soit $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction non nulle, continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux et 2π-périodique.
Alors l'équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{sur } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{sur } \mathbb{R} \end{cases}$$

avec u 2π-périodique par rapport à x et pour $t \geq 0$, continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ admet une unique solution :

$$u(t,x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{-n^2 t} e^{inx}$$

où c_n sont les coefficients de Fourier de u_0.

DVPT

[FGN] p. 9 **Thm 34 :** Si u_0 est non-constante, alors il n'existe pas de solution non bornée sur $\mathbb{R}^2$.

[FGN] p. 8 **Propriété de l'équation de la chaleur :**
1) Propagation à vitesse infinie
2) Le système est non inversible
3) Régularisation de la solution au cours du temps

Références :
[DG] : Dautray, Grasselli : « Équations aux dérivées partielles »
[ABF] : Ababou-Boumaaz, Franchetaux : « Problèmes classiques en théorie des équations aux dérivées partielles »
[AM] : Amar, Matheron : « Analyse complexe »
[FGN] : Francinou, Gianella, Nicolas : « Oraux X-ENS, Analyse 4 »
[HIR] : Hirsch, Lacombe : « Éléments d'analyse fonctionnelle »
[BRE] : Brezis : « Analyse fonctionnelle »

Lax-Milgram et le problème de Sturm-Liouville

Mercedes Haïech et Alexandre Eimer

19 octobre 2016

Théorème de Lax-Milgram

Théorème 1 (Lax-Milgram). *Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert réel. Soit*

$$\begin{array}{rccc} a : & H \times H & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & a(x, y) \end{array}$$

une forme bilinéaire continue et coercive, c'est-à-dire :

$$\exists C \in \mathbf{R}, \forall u, v \in H, \quad \|a(u, v)\| \leqslant C \|u\| \cdot \|v\|.$$

$$\exists \alpha > 0, \forall u \in H, \quad a(u, u) \geqslant \alpha \cdot \|u\|^2.$$

Soit L une forme linéaire continue sur H. Alors il existe un unique élément v dans H tel que pour tout u dans H l'on ait :

$$a(v, u) = L(u).$$

De plus, si a est symétrique, on a la caractérisation suivante grâce à l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & H & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{1}{2} a(x, x) - L(x) \end{array}$$

L'élément v est alors l'unique élément de H vérifiant l'égalité suivante,

$$\Phi(v) = \min_{u \in H} \Phi(u)$$

Étape 1 Montrons qu'il existe une application $T : H \to H$ linéaire continue telle que pour tout couple (x, y) dans H^2 l'on ait :

$$a(x, y) = \langle T(x), y \rangle.$$

On remarquera que pour tout élément x de H, l'application $y \mapsto a(x, y)$ est une forme linéaire continue. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique vecteur de H noté $T(x)$ tel que : $a(x, y) = \langle T(x), y \rangle$. Examinons les propriétés de $x \to T(x)$:

• L'application $x \mapsto T(x)$ est linéaire.

$$\begin{aligned}\langle T(x_1 + x_2), y\rangle &= a(x_1 + x_2, y)\\ &= a(x_1, y) + a(x_2, y)\\ &= \langle T(x_1), y\rangle + \langle T(x_2), y\rangle.\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout élément y dans H, on en déduit :

$$T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$$

• L'application $x \mapsto T(x)$ est continue. En effet, l'on a grâce à la continuité de a que :

$$\|T(x)\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = a(x, T(x)) \leqslant C\,\|x\|\,\|T(x)\|.$$

Ainsi, en distinguant les cas selon que $T(x)$ soit nul ou non, l'on obtient que : $\|T(x)\| \leqslant C\,\|x\|$.

Etape 2 Nous allons montrer maintenant que l'application $T : H \to H$ est bijective.

• L'application $T : H \to H$ est injective. Pour cela, nous allons montrer une inégalité préalable. Soit $x \in H$ alors l'on a :

$$\|T(x)\|\,\|x\| \geqslant \langle T(x), x\rangle = a(x, x) \geqslant \alpha\,\|x\|^2.$$

Ainsi, l'on en déduit l'inégalité :

$$\|T(x)\| \geqslant \alpha\,\|x\|.$$

Soit $x \in \ker T$, l'inégalité précédente nous permet d'assurer que $x = 0$.

• L'application $T : H \to H$ est surjective. Pour cela, nous allons montrer que l'image de T est dense et fermée.

Montrons tout d'abord qu'elle est dense : soit $y \in T(E)^{\perp}$. Alors pour tout x dans H, on a :

$$0 = \langle Tx, y\rangle = a(x, y).$$

D'où pour $x = y$:

$$0 = a(y, y) \geqslant \alpha\,\|y\|^2.$$

Donc $y = 0$ et ainsi par le critère de densité, on en conclut que $T(H)$ est dense dans H.

De plus, l'ensemble $T(H)$ est fermé. En effet soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de $T(H)$. Notons y sa limite et : $y_n = T(x_n)$. Comme $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, elle est de Cauchy : soit alors $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geqslant N$ on ait :

$$\epsilon > \|T(x_n) - T(x_m)\| \geqslant \alpha\,\|x_n - x_m\|.$$

La dernière égalité s'obtenant par l'inégalité montrée dans le paragraphe sur l'injectivité. Donc par complétude, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge -notons x sa limite- et par continuité de l'application T :

$$T(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} Tx = y.$$

Ainsi $T(H)$ est fermé. D'où :

$$T(H) = \overline{T(H)} = H.$$

Finalement l'application T est bijective.

Conclusion Soit L une forme linéaire continue. D'après le théorème de Riesz, il existe un unique élément $v \in H$ tel que pour tout $x \in H$ l'on ait :

$$\forall y \in H \quad L(y) = \langle y, v \rangle.$$

Posons alors $u = T^{-1}(v)$, on aura donc que

$$L(y) = \langle T(u), y \rangle = a(u, y)$$

Ce qui conclut quant à la première partie du théorème.

Caractérisation variationnelle On remarquera tout d'abord que $\Phi(x) \to \infty$ quand $\|x\| \to \infty$ puisque :

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}a(x,x) - L(x) \geqslant \frac{1}{2}\alpha\|x\|^2 - C\|x\|.$$

Et alors :

$$\begin{aligned}
\Phi(x) - \Phi(u) &= \frac{a(x,x)}{2} - a(u,x) + \frac{a(u,u)}{2} \\
&= \frac{a(x,x)}{2} - \frac{a(u,x)}{2} - \frac{a(u,x)}{2} + \frac{a(u,u)}{2} \\
&= \frac{a(x-u,x)}{2} + \frac{a(x,u-x)}{2} \\
&= \frac{a(x-u,x-u)}{2} \\
&\geqslant \frac{\alpha}{2}\|x-u\|^2.
\end{aligned}$$

Ce qui nous assurera bien que $\Phi(u)$ est le minimum de Φ sur H.

Application au problème de Sturm-Liouville

Soient $I =]0,1[$, $p \in C^1(\bar{I})$, $q \in C(\bar{I})$ et $f \in L^2(I)$, avec $q \geqslant 0$.
On cherche à résoudre :

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

On suppose de plus qu'il existe α tel que :

$$p(x) \geqslant \alpha > 0 \quad \forall x \in \overline{I}.$$

Nous allons chercher les solutions faibles de ce problème. Fixons les espaces :

$$H^1(I) = \{u \in L^2(I), \exists g \in L^2(I) \text{ tel que : } \int_I u\phi' = -\int_I g\phi \quad \forall \phi \in C_c^1(I)\}$$

On rappelle que $H^1(I)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \int_I uv + \int_I u'v'.$$

On remarquera alors :

$$H_0^1(I) = \overline{C_c^1(I)}.$$

Les solutions faibles seront les solutions de :

$$\int_I pu'v' + \int_I quv = \int_I fv \quad \forall v \in H_0^1(I)$$

Alors remarquons que

$$a(u,v) = \int_I pu'v' + \int_I quv = \int_I fv$$

définit une forme bilinéaire, qui est de plus coercive, en effet :

$$a(u,u) \geqslant \alpha \|u'\|^2$$

Et puisque d'après l'inégalité de Poincaré, sur $H_0^1(I)$ les normes induites par le produit scalaire de $H^1(I)$ et par $\|u'\|^2$ sont équivalentes sur $H_0^1(I)$, la forme sera coercive. De même, elle sera continue. Ainsi on peut appliquer le théorème de Lax-Milgram qui nous assurera de l'existence d'une unique solution dans $H_0^1(I)$.

Equation de la chaleur

Référence : FGNAN4 p.49
Leçons : 222, 246.

Théorème

Soit $u_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction non nulle, continue, C^1 par morceaux et 2π-périodique. Il existe une unique solution u sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ de l'équation aux dérivées partielles

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \textit{et} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ u(0,x) = u_0(x)}$$

où u est 2π-périodique par rapport à la variable x (et ce pour tout $t \geqslant 0$), continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ et C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$.

Preuve :

Analyse : Soit u une solution du problème posé. Pour $t > 0$ fixé, $u_t : x \longmapsto u(t,x)$ est 2π-périodique et de classe C^∞ donc somme de sa série de Fourier d'après le **théorème de Dirichlet** :

$$u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(t) \mathrm{e}^{inx} \quad \text{avec} \quad c_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t,x) \mathrm{e}^{-inx} \mathrm{d}x.$$

Montrons que $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ s'obtient par dérivation formelle par rapport à t de cette expression. Comme pour u, on peut écrire

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widetilde{c_n}(t) \mathrm{e}^{inx} \quad \text{avec} \quad \widetilde{c_n}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) \mathrm{e}^{-inx} \mathrm{d}x.$$

La fonction u étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$, on en déduit par le **théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre** que l'application $c_n : t \longmapsto \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} u(t,x) \mathrm{e}^{-inx} \mathrm{d}x$ est de classe C^1 (on intègre sur un compact) et $\widetilde{c_n}(t) = c_n'(t)$ de sorte que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n'(t) \mathrm{e}^{inx}.$$

De même, la fonction $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ est somme de sa série de Fourier et, par double IPP

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 c_n(t) \mathrm{e}^{inx}.$$

Ainsi, le problème s'écrit :

$$\forall t > 0\ \forall x \in \mathbb{R},\quad 0 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c_n'(t) + n^2 c_n(t)) \mathrm{e}^{inx}.$$

Or, à t fixé, cette série est normalement convergente car [1] somme de deux séries CVN (Dirichlet pour les

1. On peut aussi dire série de Fourier de 0 qui est C^∞

deux) donc on peut inverser :

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c_n'(t) + n^2 c_n(t)) \mathrm{e}^{inx} \right) \mathrm{e}^{-in_0 x} \mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c_n'(t) + n^2 c_n(t)) \underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-n_0)x} \mathrm{d}x}_{=0 \text{ sauf si } n=n_0} \\
&= 2\pi (c_{n_0}'(t) + n^2 c_{n_0}(t))
\end{aligned}
$$

où $n_0 \in \mathbb{Z}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $t > 0$, $c_n'(t) + n^2 c_n(t) = 0$ de sorte[2] qu'il existe $\alpha_n \in \mathbb{C}$ tel que $c_n(t) = \alpha_n \mathrm{e}^{-n^2 t}$.

(*) (com)

Il reste à déterminer α_n. Pour cela on considère la série de Fourier de u_0 que l'on note $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^0 \mathrm{e}^{inx}$. u_0 vérifie les hypothèses du théorème de Dirichlet donc est bien somme de sa série de Fourier. Le **théorème de Parseval** appliqué à $u_0 - u_t$ donne

$$
\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n^0 - c_n(t)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u_0(x) - u_t(x)|^2 \mathrm{d}x.
$$

A n fixé, on a donc $|C_n^0 - c_n(t)|^2 \leqslant \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} |u_0(x) - u_t(x)|^2 \mathrm{d}x$.
Or, cette intégrale tend vers 0 quand t tend vers 0 par le **théorème de convergence dominée**. En effet,
— $(t,x) \in [0,1] \times [0,2\pi] \longmapsto |u_0(x) - u_t(x)|^2 = |u(0,x) - u(t,x)|^2$ est bornée sur le compact $[0,1] \times [0,2\pi]$ par continuité de u donc majorée par une fonction intégrable sur $[0,2\pi]$ et indépendante de t
— pour tout $x \in [0,2\pi]$, $|u_0(x) - u_t(x)| \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$

En passant à la limite on obtient finalement $|C_n^0 - \alpha_n|^2 = 0$ i.e $\alpha_n = C_n^0$.
Donc si u est solution du problème $u(t,x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^0 \mathrm{e}^{-n^2 t} \mathrm{e}^{inx}$, où les C_n^0 sont les coefficients de Fourier de u_0.

Synthèse : Montrons que $u : (t,x) \longmapsto \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^0 \mathrm{e}^{-n^2 t} \mathrm{e}^{inx}$ convient.

Tout d'abord, cette série converge normalement par comparaison avec la série $\sum |C_n^0|$ qui converge en vertu du théorème de convergence normale. u est donc bien définie et continue puisque chaque fonction $(t,x) \longmapsto C_n^0 \mathrm{e}^{-n^2 t} \mathrm{e}^{inx}$ est continue + CVN.
Pour tout $t > 0$, $x \longmapsto u(t,x)$ est 2π-périodique.
La dérivation formelle de la série définissant u donne pour $k, l \in \mathbb{N}$

$$
\frac{\partial^{k+l}}{\partial t^k \partial x^l} (C_n^0 \mathrm{e}^{-n^2 t} \mathrm{e}^{inx}) = (-1)^k \mathrm{i}^l n^{2k+l} C_n^0 \mathrm{e}^{-n^2 t} \mathrm{e}^{inx}.
$$

Soit $t_0 > 0$. Comme les C_n^0 sont bornés[3] par $K = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} |u_0|$, cette série est normalement convergente sur $]t_0, +\infty[\times \mathbb{R}$ puisque

$$
\left| (-1)^k \mathrm{i}^l n^{2k+l} C_n^0 \mathrm{e}^{-n^2 t} \mathrm{e}^{inx} \right| \leqslant K n^{2k+l} \mathrm{e}^{-n^2 t_0} = o\left(\frac{1}{n^2} \right).
$$

Alors, u admet des dérivées partielles à tout ordre donc

$$
\frac{\partial^{k+l} u}{\partial t^k \partial x^l}(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \mathrm{i}^l n^{2k+l} C_n^0 \mathrm{e}^{-n^2 t} \mathrm{e}^{inx}.
$$

2. On pouvait aussi conclure en disant que le terme de droite est une série trigonométrique uniformément convergente (car normalement convergente) donc coïncide avec sa série de Fourier et est continue sur $\mathbb{R}$ et invoquer le fait que deux fonctions continues sont égales s.s.i elles ont même coefficients de Fourier

3. Il faut écrire $\displaystyle\int_0^{2\pi} u_0(x) \mathrm{e}^{-inx} \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-n)x} \mathrm{d}x = 2\pi C_n^0$

et u est de classe C^∞ sur $]t_0,+\infty[\times\mathbb{R}$ et donc sur $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$ et u vérifie bien l'équation aux dérivées partielles considérées.

Conclusion : $\boxed{\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^0 \mathrm{e}^{-n^2 t}\mathrm{e}^{inx}}$ où les C_n^0 sont les coefficients de Fourier de u_0 est l'unique solution du problème.

■

Notes :

✓ **A l'oral,**