L222

Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires

I. Généralités / Introduction.

1) Définitions

Soit $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $x=(x_1,\dots,x_d) \mapsto u(x)$ suffisamment régulière pour que les expressions qui suivent aient un sens.

Déf 1 : . Une équation aux dérivées partielles linéaires (EDPL) est une relation linéaire entre une fonction inconnue u, les variables $x_1,\dots,x_d$ et un nombre fini de dérivées partielles de u, ie une équation de la forme : (E_1) $\sum_{|\alpha|\le m} A_\alpha(x) D^\alpha u(x) = B(x)$

où $\begin{cases} D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} \\ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N} \\ |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d \end{cases}$ $\quad Lu = \sum_{|\alpha|\le m} A_\alpha D^\alpha u$ (opérateur différentiel linéaire) $\quad m \in \mathbb{N}$

- Ordre d'une EDP : + haut degré de dérivation présent dans l'équation (l'ordre de $(E_1) = m$)
- u est solution de (E_1) dans $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ si u la vérifie $\forall x \in \Omega$
- Si $B = 0$, on dit que (E_1) est homogène.

Exple 2 (Equation de la chaleur) $\partial_t u - \Delta u = 0$ dans $\Omega \times \mathbb{R}_*^+$
EDPL homogène d'ordre 2 (dimension d en espace / 1 en temps).

Déf 3 : On appelle problème aux limites une EDP munie de conditions aux limites sur la totalité de la frontière du domaine sur lequel elle est posée.

Exple 4 : $\begin{cases} \Delta u = -f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$ est un problème aux limites (Equation de Poisson)

Déf 5 : On appelle problème de Cauchy une EDP, où pour au moins une variable (généralement le temps t) les conditions ne portent que sur une partie du bord du domaine (= conditions initiales)

Exple 6 : $\begin{cases} \partial_{tt}^2 u - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_*^+ \\ u(t=0) = u_0 \text{ et } \partial_t u(t=0) = u_1 & \text{dans } \Omega \end{cases}$ (Equation des ondes)

$\Rightarrow$ problème aux limites en espace et de Cauchy en temps.

Déf 7 : Soit une EDPL sur un domaine Ω avec éventuellement des conditions aux limites et/ou initiales.
On dit que le problème est bien posé si on a existence d'une solution du problème, unicité de cette solution et stabilité par rapport aux données du problème.

2) Classification (sommaire) des EDPL d'ordre 2.

Soit $u : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et l'EDPL, d'ordre 2 d'inconnue u :
(E_2) $a\partial_{xx}^2 u + b\partial_{xy}^2 u + c\partial_{yy}^2 u + d\partial_x u + e\partial_y u + fu = g$
où a, b, c, d, e, f sont pris constants pour simplifier.

Déf 8 : On dit que (E_2) est :
- elliptique si $b^2 - 4ac < 0$
- parabolique si $b^2 - 4ac = 0$
- hyperbolique si $b^2 - 4ac > 0$

Rque : Le caractère elliptique, parabolique ou hyperbolique de (E_2) n'est pas modifié par un changement de variables.

Exples 9 : . L'équation de la chaleur est parabolique.
. Le laplacien est elliptique.
. L'équation des ondes est hyperbolique.

II. EDPL hyperboliques

1) Equation de transport.

a) Modélisation.

Dans $\mathbb{R}^d$, un contaminant de concentration $u(x,t)$ dans un fluide en mouvement de vitesse $c(x,t)$ et $f(x,t)$ la source de polluant.

Hypothèse : pas de diffusion du polluant et u, f, c réguliers.

Conservation de la matière : $\boxed{\partial_t u + \operatorname{div}(uc) = f}$

Hypothèses : fluide support incompressible ($\operatorname{div} c = 0$) et $u_0(x)$ = distribution initiale du polluant : $\boxed{\begin{cases} \partial_t u + c(x,t)\nabla u = f & \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R}^d \end{cases}}$
(équation de transport)

b) Résolution dans le cas $d=1$ (problème unidimensionnel)

$$(1)\begin{cases} \partial_t u + c(x,t)\partial_x u = f(x,t) & \forall x\in\mathbb{R}, t>0 \\ u(x,0) = u_0(x) & \forall x\in\mathbb{R} \end{cases}, \quad u_0\in C^1(\mathbb{R}),\ f\in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$$

i) Cas c = constante

• $f\equiv 0$ (équation homogène)

Déf/prop 10: • On appelle courbe caractéristique de (1)
$C_\xi = \{(X(t),t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\}$ $\forall\xi\in\mathbb{R}$ où $t\mapsto X(t)$ est solution de l'Equation différentielle (E.D) $\begin{cases}\dot{X}(t)=c \\ X(0)=\xi\in\mathbb{R}\end{cases}$ ie $X(t)=ct+\xi$ (droites caractéristiques)

• Si u est solution de (1), alors u est constante le long de la caractéristique C_ξ ie $u(X(t),t)=u(X(0),0)=u_0(\xi)$

Th 11: $\forall u_0\in C^1(\mathbb{R})$, (1) possède une unique solution C^1 définie par $\boxed{u(x,t)=u_0(x-ct)}$

Rque: Le graphe de u à l'instant t est celui de u_0 translaté de ct.

• f quelconque

Th 12: $\forall u_0\in C^1(\mathbb{R})$, (1) possède une unique solution C^1, donnée par la formule de Duhamel : $u(x,t)=u_0(x-ct)+\int_0^t f(x-c(t-s))\,ds$

i) Cas c variable et $f\equiv 0$.

On suppose $c\in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)$ globalement lipschitzienne par rapport à x.

Déf 13: Une courbe caractéristique de (1) $(t, X(t,t_0,x_0))$ où $t\mapsto X(t,t_0,x_0)$ est solution de l'EDO:

$$\begin{cases} y' = c(t,y) \\ y(t_0)=x_0\end{cases}$$

(où $X(t,t_0,x_0)$ = position à un instant t d'1 particule se situant à la position x_0 et à l'instant $t=t_0$.)

Prop 14: Toute solution de (1) est constante le long des courbes caractéristiques ie $u(t,X(t,0,x_0)) = u(0,x_0)$ $(\forall t, x_0)$

Th 15: $\forall u_0\in C^1$, (1) possède une unique solution C^1
$u(t,x)=u_0(X(0,t,x))$

2) Equation des ondes

(voir exple 6) $\Rightarrow$ modélisation de la propagation des ondes à vitesse finie (ondes acoustiques, membrane vibrante...)

Résolution dans le cas unidimensionnel (et c = constante)

$$(3)\begin{cases}\partial^2_{tt}u - c^2\partial^2_{xx}u = 0 \ (2)\ \forall x\in\mathbb{R}, \forall t\in\mathbb{R}^+_* \\ u(x,0)=u_0(x) \text{ et } \partial_t u(x,0)=u_1(x)\quad \forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$$
$u_0\in C^2(\mathbb{R})$ et $u_1\in C^1(\mathbb{R})$

= équation des cordes vibrantes (u déplacement vertical d'une corde vibrante, u_0 = déplacement initial, u_1 = vitesse initiale)

$$(2)\iff\begin{cases}\partial_t u - c\,\partial_x u = v \\ \partial_t v + c\,\partial_x v = 0\end{cases} \quad \left(\partial^2_{tt}-c^2\partial^2_{xx} = \{\partial t - c\partial x\}\{\partial t + c\partial x\}\right)$$

Th 16: Il existe une unique solution $u\in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+_*)$ du problème de Cauchy (2),(3), donnée par la formule de D'Alembert:
$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[u_0(x+ct)+u_0(x-ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}u_1(y)\,dy.$$

Conséquences:

i) u est la somme de 2 ondes progressives de vitesses respectives $+c$ et $-c$.

ii) La valeur de u en (x,t) dépend des valeurs de u_0 et u_1 sur $[x-ct, x+ct]$ (= domaine de dépendance noté $D_{x,t}$)

iii) Réciproquement, le domaine d'influence du point $(0,x_0)$ est le cône $C_{x_0} = \{(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ : |x-x_0|\le ct\}$

III. EDPL elliptiques

1) Quelques cas particuliers en dimensions 1 et 2.

Th 17: $\forall\rho\in C^0([0,1])$ $\exists!\, u\in C^2([0,1])$ tel que
$$\begin{cases}-u''=\rho \\ u(0)=u(1)=0\end{cases}$$

De plus, u est donné par la formule :
$u(x) = \int_0^1 G(x,y)\rho(y)\,dy$ avec $G(x,y) = \min(x(1-y), y(1-x))$

- Si $\rho \in C^k([0,1])$, alors $u \in C^{k+2}([0,1])$
- u ne dépend pas localement de ρ : si $[a,b] \subset [0,1]$ et si v est la solution du problème lorsque le second membre vaut $\rho + \chi_{[a,b]}$, alors $v > u$ partout.

Déf 18 : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. u est harmonique si $u \in C^2(\Omega)$ et $\Delta u = 0$.

Th 19 : . La partie réelle de toute fonction holomorphe est harmonique.
Si Ω est simplement connexe, alors la réciproque est vraie.

Exples 20 :
i) $x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(z^2)$ est harmonique.
ii) $e^x \cos(y) = \mathrm{Re}(e^z)$ est harmonique.
iii) $\log(x^2+y^2)$ est harmonique sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ mais n'est pas la partie réelle d'une fonction holomorphe.

2) Approche variationnelle

Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$

Déf 21 : . $H^1 = \{u \in L^2(\Omega) \mid \nabla u \in (L^2)^N\}$
. $\|u\|_{H^1}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2$
. $H_0^1 = \overline{D(\Omega)}^{H^1}$

Prop 22 : H^1 est un espace de Hilbert.

Th 23 (Inégalité de Poincaré)
$\exists C \geq 0$ (dépendant de Ω) $\forall u \in H_0^1 \quad \|u\|_{H^1} \leq C \|\nabla u\|_{L^2}$

Corollaire 24 : $\|u\|_{H_0^1} := \|\nabla u\|_{L^2}$ est une norme hilbertienne équivalente à $\|.\|_{H^1}$ sur H_0^1

Corollaire 25 : $\forall \rho \in L^2 \quad \exists! u \in H_0^1, \ -\Delta u = \rho$.

Rque (stabilité) $\quad \|u\|_{H_0^1} \leq C \|\rho\|_{L^2}$

Th 26 : (Principe du maximum faible)
Si $\rho \geq 0$ alors $u \geq 0$ DVLP 1

Th 27 (Lax-Milgram sur un exemple)
Si $A \in L^\infty(\Omega, M_N(\mathbb{R}))$ vérifie la condition d'uniforme ellipticité
$\exists \alpha > 0 \ \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \ \langle A\xi, \xi \rangle \geq \alpha |\xi|^2$ p.p.
alors $\forall \rho \in L^2, \ \exists! u \in H_0^1 \quad -\mathrm{div} A \nabla u = \rho$

IV. EDPL paraboliques.

1) Equation de la chaleur en 1 dimension.

Modélisation de la température $u(t,x)$ dans une barre de longueur L, maintenue à ses extrémités à la température 0 et de température initiale en chaque point de la barre $h(x)$:
Soient $Q =]0,L[\times]0,+\infty[$ et $\overline{Q} = [0,L] \times [0,+\infty[$

$$(4)\begin{cases} \partial_t u - \partial^2_{xx} u = 0 & \text{dans } Q \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t \in [0,+\infty[\\ u(x,0) = h(x) & x \in [0,L] \end{cases}$$

où $h \in C^1([0,L])$ tq $h(0) = h(L)$.

Th 28 : Le problème (4) admet une solution unique $u \in C^0(\overline{Q}) \cap C^\infty(Q)$ donnée par la formule :
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}$$ DVLP 2
où $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L h(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$

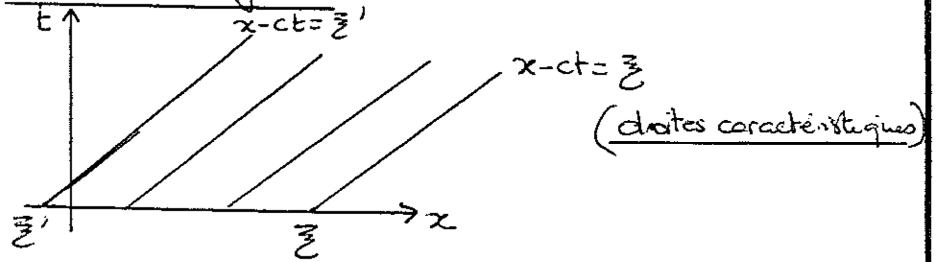
2) Propriétés de l'équation de la chaleur

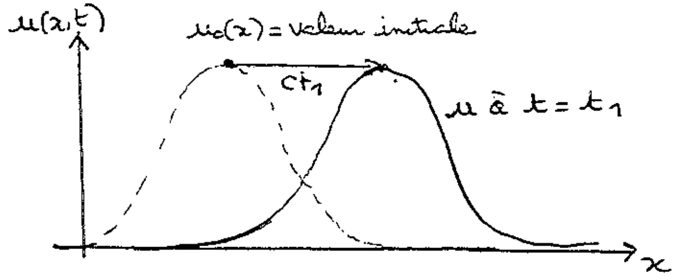
- Effet régularisant : même si la donnée de Cauchy n'est pas régulière, la solution u est de classe C^∞ dès $t > 0$.
- Propagation à vitesse infinie.
- Non-réversibilité.
- Principe du maximum :
Soit $u \in C^0(\overline{Q}) \cap C^2(Q)$ telle que $Pu(x,t) \geq 0$ sur Q où $P = \partial^2_{xx} - \partial_t$
Soit $T > 0$ et $K = [0,L] \times [0,T]$ alors $\sup_K u = \sup_{K \cap \partial K} u$
(ie u atteint son maximum en $t=0$ ou pour $x = 0, L$ et $0 \leq t \leq T$)

Annexes:

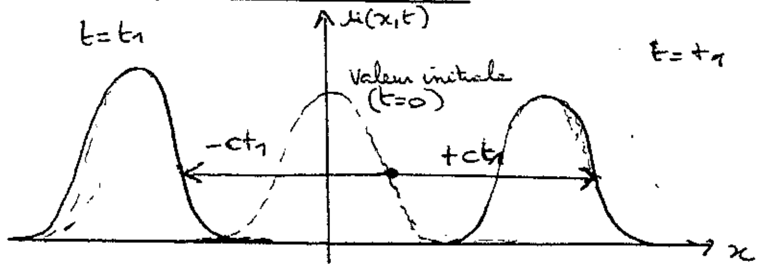
II.1) Equation de transport.

• Cas $c = cte$ + $f \equiv 0$.

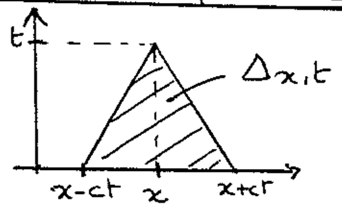




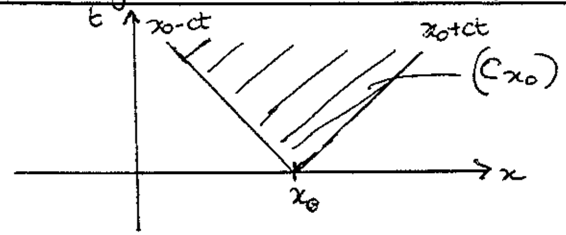
II.2) Equation des ondes (en 1 D)



• Domaine de dépendance de (x,t) dans le plan (x,t)



• Domaine d'influence de x_0 dans le plan (x,t):



Références:

H. Queffélec - C. Zuily - Analyse pour l'agrégation
C. DAVID - P. GOSSELET - EDP cours et exercices corrigés
G. ALLAIRE - Analyse numérique et optimisation
H. BREZIS - Analyse Fonctionnelle
L. Di MENZA - Analyse numérique des EDPs
E. AMAR - E. MATHERON - Analyse Complexe
M. WILLEM - Analyse fonctionnelle élémentaire

Développement : Principe du maximum faible DVLP(1)
Joackim Bernier
Référence : Michel Willem, Analyse fonctionnelle élémentaire p82. *(pour les idées du lemme)*
Théorème : *principe du maximum faible* Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $u \in H_0^1(\Omega)$ et $\rho \in L^2(\Omega)$ tels que

$$-\Delta u = \rho,$$

Si $\rho \geq 0$ alors $u \geq 0$.

lemme : Si $u \in H_0^1(\Omega)$ alors $|u| \in H_0^1(\Omega)$ et $\nabla |u| = sg(u)\nabla u$. Où $sg(0) = 0$ et si $x \neq 0$ $x.sg(x) = |x|$.

Etape 1 : soit $\epsilon > 0$ et $f(x) = \sqrt{x^2+\epsilon^2} - \epsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ alors $f \circ u \in H_0^1(\Omega)$ et $\nabla f \circ u = f' \circ u \nabla u$.

Soit $\phi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\phi_n \to u$ dans H^1. Alors $\phi_n \to u$ dans H_0^1. Donc, par le corollaire de Riesz-Fischer, quitte à extraire, il existe $g \in L^2$ telle que :

$$\begin{cases} \phi_n \to u \ pp, \\ |\phi_n| \leq g. \end{cases}$$

On va vouloir approcher $f \circ u$ par $f \circ \phi_n$, ce qui est légitime, car, puisque $f \circ \phi_n \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et que $f(0) = 0$ alors $f \circ \phi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Vérifions d'abord que $f \circ \phi_n$ tend vers $f \circ u$ dans L^2.
En effet, par l'inégalité triangulaire, $0 \leq f(x) \leq |x|$ donc $0 \leq f \circ \phi_n \leq |\phi_n| \leq g \in L^2$, d'autre part f est continue donc $f \circ \phi_n \to f \circ u$ pp, ainsi le théorème de convergence dominée permet de conclure.

On passe ensuite à la limite pour le gradient. Par calcul de dérivées composées on a

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+\epsilon^2}} \ et \ \nabla f \circ \phi_n = f' \circ \phi_n \nabla \phi_n.$$

Or d'une part f' est continue donc $f' \circ \phi_n \to f \circ u$ pp. D'autre part $|f'| \leq 1$ donc par le théorème de convergence dominée :

$$(f' \circ \phi_n - f' \circ u)\nabla u \to 0 \ dans \ L^2.$$

On a aussi supposé que $\nabla \phi_n \to \nabla u$ donc, f' étant bornée, :

$$f' \circ \phi_n(\nabla u - \nabla \phi_n) \to 0 \ dans \ L^2.$$

En sommant les deux convergence on a bien montrer que

$$\nabla f \circ \phi_n \to f' \circ u \nabla u \ dans \ L^2.$$

On a donc aussi $\nabla f \circ u = f' \circ u \nabla u$ par continuité de la dérivation au sens des distributions.

On vient donc de montrer d'une part que $f \circ u \in H^1$ et qu'autre part que $f \circ u$ est limite dans H^1 de fonctions test. Donc $f \circ u \in H_0^1(\Omega)$.

Etape 2 : Passer à la limite en ϵ.

Notons maintenant f_ϵ la fonction précédente. Alors $0 \leq f_\epsilon \circ u \leq u$ et $f_\epsilon \circ u \to |u|$ partout. Donc par le théorème de convergence dominée $f_\epsilon \circ u \to |u|$ dans L^2.
De même $|f'_\epsilon \circ u| \leq 1$ et $|f'_\epsilon \circ u| \to sg(u)$ partout donc là encore par le théorème de convergence dominée $\nabla f_\epsilon \circ u \to sg(u)\nabla u$ dans L^2.

On a donc aussi $\nabla |u| = sg(u)\nabla u$ par continuité de la dérivation au sens des distributions.

Là encore on a montré que $|u| \in H^1$ et que $|u|$ est limite de fonction de H_0^1, qui est fermé, donc $|u| \in H_0^1$.
fin lemme .

On peut alors montrer le théorème. En posant $u^- = \frac{1}{2}(|u| - u)$, la partie négative de u, alors par application du lemme :

$$u^- \in H_0^1(\Omega) \; et \; \nabla u^- = -\mathbb{1}_{u<0} \nabla u.$$

Mais alors, on peut évaluer la formulation variationnelle en u^-. Il vient alors :

$$-\int_\Omega |\nabla u^-|^2 = -\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathbb{1}_{u<0} = \int_\Omega \rho u^-$$

Or par hypothèse $\rho \geq 0$ donc $\rho u^- \geq 0$. Les deux membres de l'égalité étant de signes opposés, ils sont nuls. Donc

$$\int_\Omega |\nabla u^-|^2 = 0.$$

Or, d'après l'inégalité de Poincaré, il s'agit d'une norme sur H_0^1. Donc u^- est nulle. C'est à dire : $u \geq 0$.

Développement : Equation de la chaleur dans un barre DVLP(2)
Joackim Bernier
Référence : Zuily Queffélec, *Analyse pour l'agrégation* , page 108.
Théorème : Soient $L > 0$, $Q =]0, +\infty[\times]0, L[$, $h \in C^1([0, L])$ telle que $h(0) = h(L) = 0$.
Alors, $\exists! u \in C^0(\overline{Q}) \cap C^2(Q)$ vérifiant :

$$\begin{cases} i)\ \partial_t u - \partial_x^2 u = 0, \\ ii)\ \forall t,\ u(t,0) = u(t,L), \\ iii)\ \forall x,\ u(0,x) = h(x). \end{cases}$$

Une telle solution vérifie alors $u \in C^\infty(Q)$.

Démonstration : On s'assure d'abord de l'unicité.

lemme : (principe du maximum)
Si $u \in C^0(\overline{Q}) \cap C^2(Q)$, vérifie $\partial_x^2 u - \partial_t u \geq 0$ sur Q alors $\forall T > 0$ en posant $K = [0, T] \times [0, L]$

$$\sup_K u = \sup_{K \cap \partial Q} u.$$

dem lemme : Posons $u_\epsilon = u + \epsilon x^2$. Alors u_ϵ est continue sur K qui est compact, donc

$$\exists m_\epsilon = (t_\epsilon, x_\epsilon) \in K,\ u_\epsilon(m_\epsilon) = \max_K u_\epsilon.$$

Par l'absurde si $m_\epsilon \notin K \cap \partial Q$ alors

$$\begin{cases} 0 < x_\epsilon < L, \\ 0 < t_\epsilon \leq T. \end{cases}$$

m_ϵ étant un maximum, on obtient classiquement en considérant les taux d'accroissement :

$$\begin{cases} \partial_x u_\epsilon(m_\epsilon) = 0 \ et\ \partial_x^2 u_\epsilon(m_\epsilon) \leq 0, \\ \partial_t u_\epsilon(m_\epsilon) \geq 0. \end{cases}$$

Donc $\partial_x^2 u_\epsilon(m_\epsilon) - \partial_t u_\epsilon(m_\epsilon) \leq 0$.
Or $\partial_x^2 u_\epsilon - \partial_t u_\epsilon = \partial_x^2 u - \partial_t u + 2\epsilon \geq 2\epsilon$. Contradiction : $m_\epsilon \in K \cap \partial Q$.
Finalement :

$$\sup_K u \leq \sup_K u_\epsilon = \sup_{K \cap \partial Q} u_\epsilon \leq \sup_{K \cap \partial Q} u + \epsilon L^2 \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} \sup_{K \cap \partial Q} u.$$

fin lemme

Il y a donc au plus une solution au problème car la différence de deux solutions est nulle sur $K \cap \partial Q$.

On souhaite alors construire une solution, on commence pour cela par chercher des solutions de $i)$ et $ii)$ sous la forme $f(x)g(t)$. Une disjonction de cas conduit à trouver des solutions de la forme :

$$u_n(t, x) = sin(\frac{\pi n x}{L}) e^{-(\frac{\pi n}{L})^2 t} \ avec\ n \in \mathbb{Z}.$$

L'équation de la chaleur étant linéaire, une combinaison linéaire de solutions est une solution. On est donc amené à chercher u sous la forme :

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n u_n(t, x).$$

On aurait alors (formellement) :

$$h(x) = u(0, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n sin(\frac{\pi n x}{L}).$$

On reconnait une sorte de développement en série de Fourier.
Reste à rendre ce raisonnement rigoureux.

Prolongeons b sur $[-L,0]$ par imparité :

$$b(-x) = -b(x).$$

Donc puisque $b(0) = 0$ alors $b \in \mathcal{C}^1([-L,L])$. Mais $b(-L) = b(L) = 0$, on peut donc prolonger b par $2L$ périodicité à $\mathbb{R}$ en une fonction continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Elle admet donc une série de Fourier normalement convergente :

$$\exists b_n \in l^1(\mathbb{Z}),\ b(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n sin(\frac{\pi n x}{L}).$$

On pose donc

$$u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n u_n(t,x).$$

Remarquons tout d'abord que puisque u_n est continue et $|u_n| \leq 1$ alors la série est absolument convergente dans $\mathcal{C}_b^0(\overline{Q})$. Donc u est bien définie et continue sur $\overline{Q}$, de plus u vérifie *ii*) et *iii*).

Vérifions enfin que $u \in \mathcal{C}^\infty(Q)$. Il suffit pour cela de vérifier cette propriété sur tout compact de Q.
Notons $0 < \epsilon < T$ puis posons $K = [\epsilon, T] \times [0,L]$ et remarquons que $u_n \in \mathcal{C}^\infty(K)$. Il suffit alors de voir que pour tout k, la série est absolument convergente dans $\mathcal{C}^k(K)$, car on a la domination suivante sur K :

$$|\partial_t^a \partial_x^b u_n| \leq (\frac{\pi n}{L})^{a+2b} e^{-(\frac{\pi n}{L})^2 \epsilon} \in c_0(\mathbb{Z}) \subset l^\infty(\mathbb{Z}).$$

Or $\mathcal{C}^k(K)$ est un espace de Banach, donc la série converge dans $\mathcal{C}^k(K)$.

On vient donc de prouver que u a la régularité souhaitée. Mais $\partial_t - \partial_x^2 \in \mathcal{L}_c(\mathcal{C}^2(K);\mathcal{C}^0(K))$ et la série converge dans $\mathcal{C}^2(K)$ donc u vérifie *i*) :

$$(\partial_t - \partial_x^2)u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n(\partial_t - \partial_x^2)u_n = 0.$$