①

220

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES. EXEMPLES DE RÉSOLUTION ET D'ÉTUDES DE SOLUTION EN DIMENSION 1 ET 2

Sylvain PROCOPE-MAMERT
Louis NOIZET

I - Définition du problème, existence et unicité de solutions.

A - Définitions

Soit E un espace de Banach, Ω un ouvert inclus dans $\mathbb{R}\times E^{m+1}$ et une fonction continue $F : \Omega \to E$.

Définition 1: Une solution de l'équation différentielle ordinaire $F(t, y, y', \dots, y^{(m)}) = 0$ est une fonction $y : I \subseteq \mathbb{R} \to E$ m fois dérivable telle que $F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(m)}(t)) = 0$ pour tout $t \in I$.

Remarque 2: Dans la plupart des cas, on a ou on peut se ramener en appliquant le théorème des fonctions implicites à une équation de la forme $y^{(m)} = G(t, y, \dots, y^{(m-1)})$. Des problèmes de recollement peuvent alors subvenir. En posant $Y(t) = (y(t), y'(t), \dots, y^{(m-1)}(t))$, on peut alors se réduire à $Y'(t) = F(t, Y(t))$.

Dans la suite, on s'intéressera à l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ avec $f \in \mathcal{C}(J\times E, E)$.

Exemple 3: Le principe fondamental de la dynamique donne des équations de la forme
$$m\ddot{x} = \Sigma \text{ Force}.$$

Définition 4: Une solution y est dite maximale si elle n'a pas de solution qui la prolonge strictement. Elle est dite globale si elle est définie sur J tout entier.

Remarque 5: Une solution globale est maximale mais l'inverse n'est pas toujours vrai. Par exemple $y' = y^2$ admet comme solution maximale la fonction $f : t \mapsto -\frac{1}{t}$ définie sur $]0; +\infty[$.

Définition 6: Si la fonction f ne dépend pas de t, c'est-à-dire si $y' = g(y)$, on dit que l'équation différentielle est autonome.

Définition 7: Étudier un problème de Cauchy revient à se donner $(t_0, y_0) \in J\times E$ et à chercher les solutions telles que $y(t_0) = y_0$.

B - Solutions

Lemme 8 (Grönwall): Si $u, a, c : [0,T] \to \mathbb{R}$ continues avec u et a positives, et si on a
$$u(t) \leq c(t) + \int_0^t a(s)u(s)\,ds \quad (0\leq t\leq T)$$
alors on a le résultat suivant :
$$u(t) \leq c(t) + \int_0^t c(s)\,a(s)\exp\left(\int_s^t a(x)\,dx\right)ds$$

Théorème 9 (Cauchy-Lipschitz Local): Si f est localement lipschitzienne en y, alors il existe une unique solution maximale à tout problème de Cauchy.

Théorème 10 (Cauchy-Lipschitz global): Si f est Lipschitzienne en y, alors il existe une unique solution globale à tout problème de Cauchy.

Développement

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES. EXEMPLES DE RÉSOLUTION ET D'ÉTUDES DE SOLUTION EN DIMENSION 1 ET 2

220

Théorème 11 (Cauchy-Arzela-Peano): Soient a et b deux réels positifs et $(t_0, y_0) \in J \times E$. Si on a $M>0$ tel que $\sup_{\substack{t_0-a \leq t \leq t_0+a \\ y \in B(y_0,b)}} |f(t,y)| \leq M$, alors il existe une solution au problème de Cauchy $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ définie sur l'intervalle $[t_0-T, t_0+T]$ pour tout $T \leq \min(a, \frac{b}{M})$.

Théorème 12 (sortie de tout compact): Une solution $y : I =]a,b[\to E$ est maximale ssi $t \mapsto (t, y(t))$ sort de tout compact K de $J \times E$ quand t tend vers a^+ ou b^-.

II - Méthodes de résolution

A - Explicite

Exemple 13 (Cas linéaire). On se donne une équation linéaire d'ordre n, c'est-à-dire de la forme :

$$y^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) y^{(k)}(t) + b(t). \quad (*)$$

On appelle équation homogène associée l'équation

$$y^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) y^{(k)}(t). \quad (*_h)$$

Alors, si on a y_p une solution particulière de $(*)$, toute solution est de la forme $y_p + y_h$ où y_h est une solution de $(*_h)$.

Application 14 (Circuit RLC): Dans un circuit en série fermée avec une résistance R, un condensateur de capacité C et une bobine d'inductance L, on a le système suivant d'inconnues (U_c, I)

$$\begin{cases} L \frac{dI}{dt} + IR = U_c \\ C \frac{dU_c}{dt} = -I \end{cases}$$

Exemple 15:

- Bernoulli : $y' = a(t)y + b(t)y^\alpha$ avec $\alpha \neq 1$. On pose $z = y^{1-\alpha}$. On a alors :
$$\frac{z'}{1-\alpha} = a(t)z + b(t).$$
- Ricatti : $y' = a(t)y^2 + b(t)y + c$. Si y_p est une solution particulière, on pose $z = y - y_p$ et on a :
$$z' = (2a(t)y_p(t) + b(t))z + a(t)z^2$$
qui est une équation de Bernoulli.

B - Approchée

On veut construire une solution approchée d'un problème de Cauchy $y_0 = y(t_0)$ étant donné une subdivision de $[t_0, t_0+T]$ $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0 + T$ et on cherche à calculer des valeurs approchées de $(y(t_n))$.

Définition 16 (Méthode d'Euler): On définit la solution approchée φ sur $[t_0, t_0+T]$ avec une fonction continue affine sur les $[t_i, t_{i+1}]$ qui vérifie $\varphi(t_n) = y_n$ où les y_n sont construits par récurrence avec

$$y_{n+1} = y_n + (t_{n+1} - t_n) f(t_n, y_n).$$

Sur $[t_0 - T]$ on effectue la même construction avec une subdivision

$$t_{-p} = t_0 - T < t_{-p+1} < \dots < t_1 < t_0.$$

Sylvain PROCOPE-MAMERT
Louis NOIZET

Application 17 (Pendule) : Pour un pendule, on a $\ddot{\theta} - \omega^2 \sin\theta = 0$. On peut utiliser Euler pour avoir une solution approchée

Définition 18 (solution ε-approchée) : Soit $\varepsilon > 0$. Une fonction y est une solution ε-approchée sur l'intervalle I du problème de Cauchy $y' = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$ si elle vérifie

$$\sup_{t \in I} |y'(t) - f(t, y(t))| \leq \varepsilon.$$

Remarque 19 : Si on a f localement lipschitzienne par rapport à y, en utilisant le lemme de Grönwall, on obtient une constante K telle que pour y_ε solution ε-approchée sur un segment I et y solution exacte, on a $\sup_{t \in I} |y_\varepsilon(t) - y| \leq K\varepsilon$.

Proposition 20 : Soit y construite par la méthode d'Euler, alors c'est une solution ε-approchée sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ avec $\varepsilon = \omega_f((M+1)h)$ où h est le pas maximal, et M une borne de f et ω_f le module de continuité défini par $(u > 0)$:
$\omega_f(u) = \sup\{|f(t_1,y_1) - f(t_2,y_2)|$ t.q. $|t_2 - t_1| + |y_2 - y_1| \leq u\}$

Remarque 21 : Si $u \to 0$ on a $\omega_f(u) \to 0$ ainsi $\varepsilon \to 0$. Ce qui donne une convergence uniforme quand $h \to 0$. vers la solution exacte lorsque f est lipschitzienne.

III - Stabilité des équations autonomes

Dans cette section, on se placera dans le cas d'une équation autonome (E) : $y' = f(y)$

Définition 22 : Un point d'équilibre est un point $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = 0$.

Définition 23 : On dit que un point d'équilibre x_0 est
- stable si $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tq si x solution de (E) et t_0 tel que $|x(t_0) - x_0| < \delta$, alors pour tout $t \geq t_0$, x est définie en t et $|x(t) - x_0| < \varepsilon$.
- instable sinon
- asymptotiquement stable si $\exists \delta > 0$ tel que si x est solution de (E), et t_0 tel que $|x(t_0) - x_0| < \delta$ alors pour $t \geq t_0$, x est définie en t et $\lim_{t \to +\infty} x(t) = x_0$.

Exemple 24 (Cas linéaire en dimension 2 $Y' = AY$)
On se donne $A \in GL_2(\mathbb{R})$ et on s'intéresse à

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

Déjà, 0 est l'unique point d'équilibre. On distingue suivant les valeurs propres λ_1, λ_2 de A :

$$\left.\begin{array}{l} \text{- les deux sont négatives : nœud stable} \\ \text{- } \lambda_1 < 0 < \lambda_2 \text{ : col (donc instable)} \\ \text{- les deux sont positives : nœud instable} \end{array}\right\} \text{réelles}$$

Si A a deux valeurs propres non réelles λ et $\bar{\lambda}$,
- $Re(\lambda) < 0$: stable
- $Re(\lambda) = 0$: centre (stable mais pas asymptotiquement)
- $Re(\lambda) > 0$: instable

Théorème 25 (Liapounov) :
On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

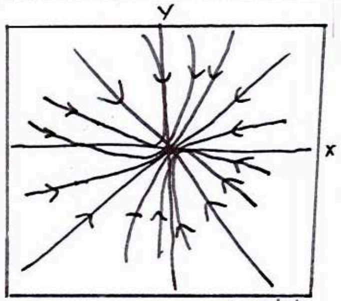
où f est de classe C^1 et $f(0) = 0$. Si $Df(0)$ a ses valeurs propres de partie réelle strictement négative, alors l'origine est un point d'équilibre attractif (pour y_0 suffisamment proche de 0, $y(t)$ tend exponentiellement vers 0 quand t tend vers $+\infty$).

Développement

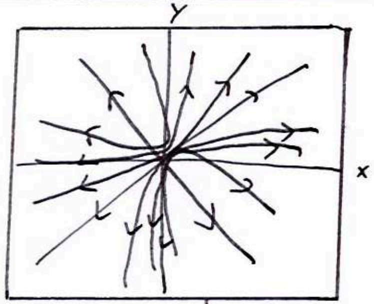
Sylvain PROCOPE-MAMERT / Louis NOIZET

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES. EXEMPLES DE RÉSOLUTION ET D'ÉTUDES DE SOLUTION EN DIMENSION 1 ET 2.

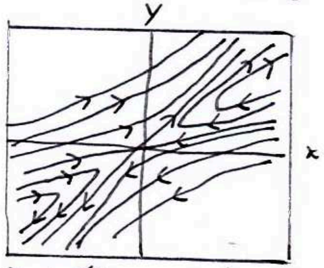
220



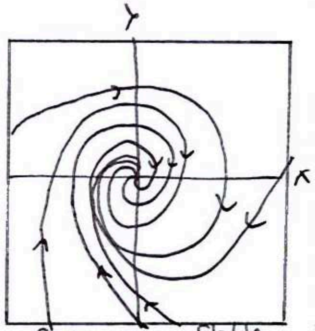
$\lambda_1<\lambda_2<0$ noeud stable



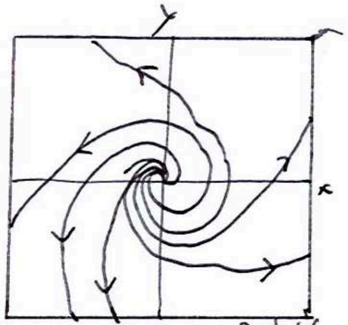
$0<\lambda_1<\lambda_2$ noeud instable



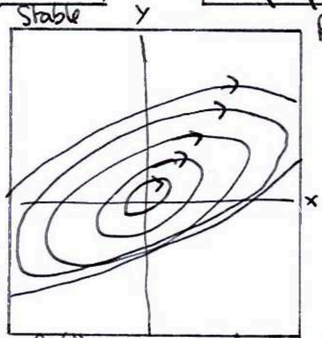
$\lambda_1<0<\lambda_2$ col



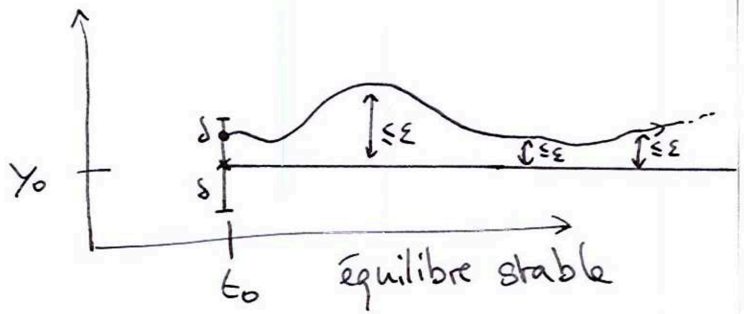
Re(λ) <0 Stable



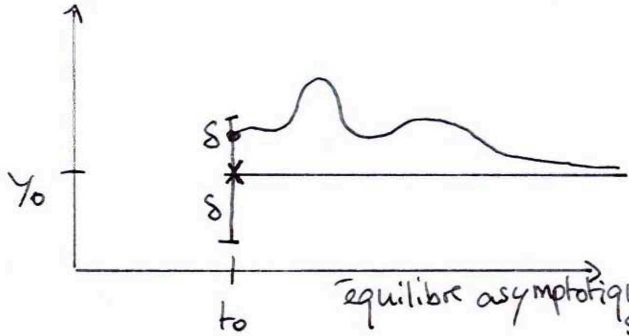
Re(λ)>0 instable



Re(λ)=0 centre



équilibre stable



équilibre asymptotiquement stable.

Sylvain PROCOPE-MAMERT
Louis NOIZET