Leçon 220

Equation différentielles ordinaires. Exemples de résolutions et d'études de solution en dimension 1 et 2

I Étude Théorique des équations différentielles :

1) Notion de solution :

Def 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit une fonction continue $F : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. On appelle solution de l'équation différentielle d'ordre n : $y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ toute application $\varphi : I \to \mathbb{R}^m$ (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$) n fois dérivables et vérifiant

(i) $\forall t \in I$, $(t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in \Omega$

(ii) $\forall t \in I$, $F(t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) = \varphi^{(n)}(t)$.

Rq 2 : Toute équation différentielle peut se ramener à une équation différentielle d'ordre 1 de la forme $y' = F(t, y)$ c'est pourquoi on se limitera dans cette partie à l'étude des equations différentielles d'ordre 1.

Cadre 3 : On considère dans la suite l'équation différentielle

(E) $y' = f(t, y)$ où $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ est continue et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Def 4 : Étant donné $(t_0, x_0) \in J \times \Omega$, le problème de Cauchy consiste à trouver une solution $\varphi : I \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\varphi(t_0) = x_0$.

Def 5 : Soient $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ et $\tilde{\varphi} : J \to \mathbb{R}^n$. On dit que $\tilde{\varphi}$ est un prolongement de φ si $I \subsetneq J$ et $\tilde{\varphi}_{|I} = \varphi$.

Def 6 : Une solution $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est dite maximale si elle n'admet aucun prolongement

Def 7 : Une solution $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est dite globale si $I = J$ en gardant les notations de (E)

Thm 8 : Toute solution y de (E) se prolonge en une solution maximale $\tilde{y}$

Prop 9 : Toute solution globale est maximale, mais la réciproque est fausse comme le montre le prochain exemple :

Contre-ex 10 : les solutions de $y' = y^2$ sur $J \times \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ne sont pas définies sur $\mathbb{R}$

2) Existence et unicité des solutions :

Def : On dit que $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(x_0, r_0)$ est un cylindre de sécurité pour (E) si toute solution $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ du problème de Cauchy pour $(t_0, x_0) \in J \times \Omega$ avec $I \subset [t_0 - T, t_0 + T]$ reste contenue dans $\overline{B}(x_0, r_0)$

Def 11 : Une fonction $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ est dite localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable si : $\forall (t_0, x_0) \in I \times \Omega$, il existe un voisinage V de (t_0, x_0) et $C > 0$ tel que :

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq C |x_1 - x_2|, \quad \forall (t, x_i) \in V, \ i = 1, 2.$$

Thm 12 : (Cauchy Lipschitz local). Soit le système (E) avec f en plus localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Alors $\forall (t_0, x_0) \in J \times \Omega$, le problème de Cauchy associé à (t_0, x_0) admet une unique solution maximale $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$.

Ex 13 : Il y a unicité locale mais pas globale comme le montre l'exemple de l'équation suivante $y' = |y|^{2/3}$ avec $J \times \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Thm 14 : (Cauchy Lipschitz global). Avec les mêmes hypothèses que dans le théorème 12, si f est en plus globalement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, alors tout problème de Cauchy admet une unique solution globale.

Ex 15 : $\begin{cases} u'' = -\sin u \\ u(0) = a \\ u'(0) = b \end{cases}$ admet une unique solution définie sur $\mathbb{R}$.

App 16 : Toute solution globale de $\begin{cases} y' = (y+1)(y-1) \\ y(0) \in [-1, 1] \end{cases}$ est bornée en valeur absolue par 1.

Thm 17 : (Cauchy - Peano - Arzela) : Soit $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(x_0, r_0)$ avec $T \leq \min(T_0, \frac{r_0}{M})$ un cylindre de sécurité pour (E). On suppose ici que f est seulement continue. Alors il existe une solution $\varphi : [t_0 - T, t_0 + T] \to \overline{B}(x_0, r_0)$ de (E) avec $y(t_0) = x_0$.

Ex 19 : l'équation $y' = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \sqrt{y} & \text{sinon} \end{cases}$ avec $y(0) = 0$ admet une infinité de solutions maximales. On perd donc le critère d'unicité.

3) Étude des solutions :

Thm 20 : (Lemme de Gronwall) : Soient ϕ, ψ et y trois fonctions continues sur un segment $[a, b]$, à valeurs positives vérifiant

$$\forall t \in [a, b], \quad y(t) \leq \phi(t) + \int_a^t \psi(s) y(s) \, ds$$

Alors : $\forall t \in [a, b]$, $y(t) \leq \phi(t) + \int_a^t \phi(s) \psi(s) \exp\left(\int_s^t \psi(u) \, du\right) ds$ Dev 1

Corol 21 : Soient ψ et $y : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ deux fonctions continues et vérifiant $\exists c > 0$, $\forall t \in [a, b]$, $y(t) \leq c + \int_a^t \psi(s) y(s) \, ds$. Alors, $\forall t \in [a, b]$, $y(t) \leq c\, e^{\int_a^t \psi(s) ds}$

Corol 22 : Soit $y:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ une fonction $\mathcal{C}^1$ vérifiant :
$\exists \alpha>0,\ \exists \beta>0,\ \forall t\in[a,b],\ \|y'(t)\|\le \beta+\alpha\|y(t)\|$
Alors $\forall t\in[a,b],\ \|y(t)\|\le \|y(a)\|\, e^{\alpha(t-a)} + \frac{\beta}{\alpha}\left(e^{\alpha(t-a)}-1\right)$

App 23 : Soit $q:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, strictement positive et croissante. Toutes les solutions de (L) : $y''+q(t)y=0$ sont bornées sur $\mathbb{R}^+$

Dev 1

App 24 : Soit $f: I\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ satisfaisant les hypothèses de Cauchy-Lipschitz. On suppose qu'il existe deux fonctions continues a et b : $I\to[0,\infty[$ telles que $\forall (t,y)\in I\times\mathbb{R}^n$ on ait :
$$\|f(t,y)\|\le a(t)\|y(t)\|+b(t)$$
Alors, les solutions maximales de (E) sont globales

Thm 25 (sortie de tout compact) : Soit $f: J\times\Omega\to\mathbb{R}^n$. On suppose que f satisfait les hypothèses de Cauchy-Lipschitz. Soit $\varphi\in\,]t^-,t^+[\,\to\Omega$ une solution de l'équation différentielle (E). On a donc $]t^-,t^+[\,\subset J$. La solution est maximale à droite si et seulement si :
- soit $t^+=\sup J$
- soit $t^+<\sup J$ et pour tout compact K de Ω, il existe un instant t_K tel que $\varphi(t)\notin K$ dès que $t\in[t_K, t^+[$

On a le même résultat pour une solution maximale à gauche.

Rq 26 : En gardant les notations du théorème 25, si $J=\mathbb{R}$ et $\Omega=\mathbb{R}^n$, si $t^+<+\infty$ alors $\|y(t)\|\to+\infty$ lorsque $t\to t^+$

App 27 : La solution maximale de l'équation différentielle
$y'=(y^2-1)\sinh t+t^5\sin(\pi y)$ avec comme condition initiale (x_0,t_0) avec $x_0\in[-1,1]$ est globale.

App 28 : Soit (L) : $y'=A(t)y+B(t)$ une équation différentielle linéaire sur $\mathbb{R}^n$, où A et B : $]a,b[\,\to\mathbb{R}^n$ sont continues. Alors les solutions maximales de (L) sont globales.

II Résolution explicite et résolution approchée :

1) Résolution explicite d'équations différentielles particulières :

Thm 29 : (cas linéaire) : $y'=a(t)y+b(t)$ * où $a,b: I\to\mathbb{R}$ sont continues. La solution générale est $y=y_0+y_1$ avec y_1 une solution particulière de * et y_0 une solution de l'équation homogène (H) $y'=a(t)y$.

Thm 30 : les solutions maximales de (H) forment un espace vectoriel de dimension 1, ayant pour base $t\longmapsto e^{A(t)}$ où A est une primitive de a.

Exemple 31 : Résolution de $(1+t^2)y'=ty+(1+t^2)$

Exemple 32 (Équations de Bernoulli) : L'étude des équations différentielles de la forme $y'=p(t)y+q(t)y^\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ avec $p,q: I\to\mathbb{R}$ continue se ramène à l'étude de $\frac{1}{1-\alpha}z'=p(t)z+q(t)$ avec $z=y^{1-\alpha}$.

Exemple 33 (Équations de Riccati) : (R) : $y'=a(t)y^2+b(t)y+c(t)$ avec $a,b,c: I\to\mathbb{R}$ continues. Si on connait une solution particulière y_1 de (R), alors en posant $z=y-y_1$, on se ramène à l'équation $z'=(2a(t)y_1(t)+b(t))z+a(t)z^2$, une équation de Bernoulli avec $\alpha=2$

Exemple 34 : les solutions de $(1-t^3)y'+t^2y+y^2-2t=0$ sont de la forme $y(t)=\frac{\lambda t^2+1}{t+\lambda}$, $\lambda\in\mathbb{R}$

2) Résolution approchée :

Cadre : Soit l'équation différentielle (E) $y'=f(t,y)$ avec $f:[t_0,t_0+T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction régulière. Soit $t_0<t_1<\dots<t_N=t_0+T$ une subdivision de $[t_0,t_0+T]$. On pose dans la suite $h_n=t_{n+1}-t_n$, $0\le n\le N-1$. On cherche à déterminer des valeurs approchées de $y_0, y_1, \dots, y_N$ des valeurs $y(t_n)$ prises par la solution exacte de (E).

def 35 : l'erreur de consistance en relative à une solution exacte φ de (E) est $e_n=\varphi(t_{n+1})-y_{n+1}$, $0\le n\le N-1$.

def 36 : La méthode d'Euler consiste à calculer les y_n, $0\le n\le N$ récursivement : $\begin{cases} y_{n+1}=y_n+h_n f(t_n,y_n) \\ t_{n+1}=t_n+h_n \end{cases}$ avec (y_0,t_0) les conditions initiales de (E)

Prop 37 : Si f est $\mathcal{C}^1$, alors on a comme erreur de consistance $e_n = \frac{1}{2} h_n^2 f^{[1]}(t_n, y_n) + o(h_n^2)$ où $f^{[1]} = f'$. (figure 1)

III. Étude de la stabilité des systèmes différentiels autonome :

1) Quelques notations :

def 38 : Un système différentiel autonome est un système de la forme :

$$(A) \quad y' = f(y)$$

où f est une fonction d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$

def 39 : Un point d'équilibre du système (A) est un point x_0 tel que $f(x_0) = 0$

def 40 : Soit x_0 un point d'équilibre de (A)

- x_0 est stable si : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si φ est une solution de (A) qui à un instant t_0 vérifie $|\varphi(t_0) - x_0| < \delta$, on a
  - (i) φ est définie pour tout $t \geq t_0$
  - (ii) $|\varphi(t) - x_0| < \varepsilon$ pour tout $t \geq t_0$
- x_0 est instable s'il n'est pas stable
- x_0 est asymptotiquement stable si il existe $\delta > 0$ tel que si φ est une solution de (A), qui à un instant t_0 vérifie $|\varphi(t_0) - x_0| < \delta$ on a
  - (i) φ est définie pour $t \geq t_0$ (figure 2)
  - (ii) $\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = x_0$

Théorème 41 (Hadamard - Lévy) : Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. On a équivalence entre : Dev 2

(i) f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$

(ii) f est propre, c'est à dire que l'image réciproque de tout compact est un compact. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, la matrice Jacobienne $Df(x)$ est inversible.

2) Étude qualitative des systèmes linéaires dans $\mathbb{R}^2$:

Cadre : On considère dans ce paragraphe un système différentiel du type $y' = Ay$ avec A une matrice constante $\in GL_2(\mathbb{R})$

Il y a plusieurs cas :

* A a deux valeurs propres λ_1, λ_2 réelles : les courbes intégrales sont de la forme $y = C|x|^{\lambda_2/\lambda_1}$, $C \in \mathbb{R}$.

* les valeurs propres sont confondues $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$. Nous avons deux cas :
  - A est diagonalisable, les courbes sont de la forme $y = \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$
  - A est trigonalisable. Les courbes sont de la forme $y = y_0 |x| + \frac{x}{\lambda} \ln|x|$

* les valeurs propres de A sont non réelles. En notant $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ les deux valeurs propres de A, la solution générale est $z(t) = z_0 e^{\alpha t} e^{i\beta t}$. (figure 3)

3) Cas Général :

Thm 42 (Liapunov) : On considère le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = x_0 \end{cases}$ où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est $\mathcal{C}^1$. On suppose en plus que $f(0) = 0$ et que $Df(0)$ a ses valeurs propres de partie réelle < 0. Alors l'origine est asymptotiquement stable.

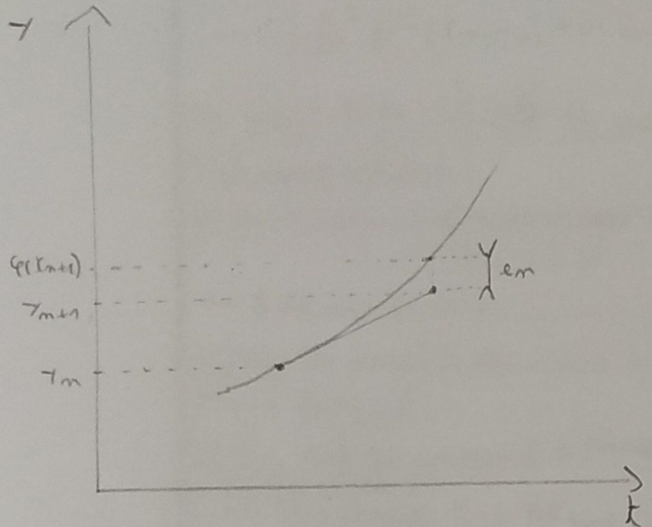
Contre-ex 43 : La partie réelle des valeurs propres de $Df(0)$ doivent être strictement négatives. En effet,

$\begin{cases} x' = \alpha x^3 \\ y' = \beta y^3 \end{cases}$ $t \in [0, +\infty[$ à $Df(0) = 0$. La solution du problème de Cauchy est $\begin{cases} x(t) = x_0 (1 - 2\alpha x_0^2 t)^{-1/2} \\ y(t) = y_0 (1 - 2\beta y_0^2 t)^{-1/2} \end{cases}$

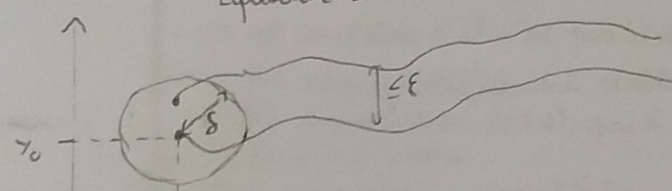
et l'origine n'est pas asymptotiquement stable si $\alpha > 0$ ou $\beta > 0$.

Références :
- Analyse pour l'agrégation [ZQ]
- Analyse numérique et équations différentielles [Dem]
- Gourdon analyse
- Un max de maths (Zavadowique)
- Calcul différentiel et équations différentielles (Benzoni)

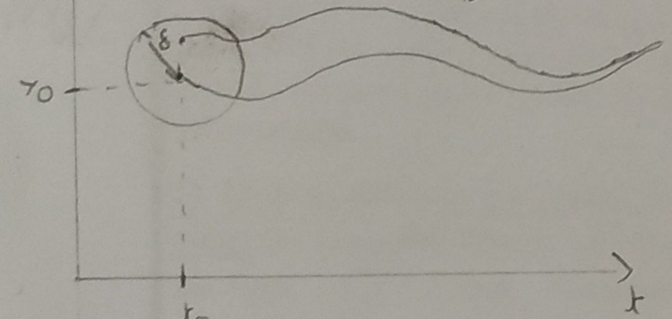
Méthode d'Euler



Équilibre stable

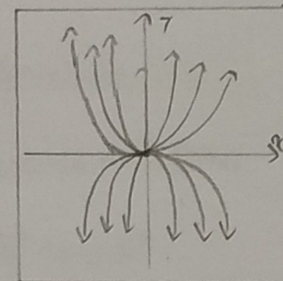


Équilibre asymptotiquement stable

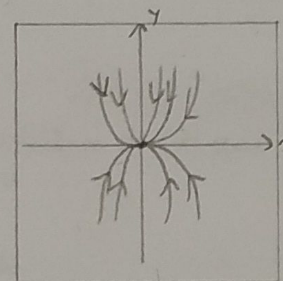


Étude $Y' = AY$

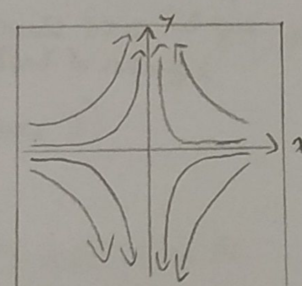
✱ A à deux Vp $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$



$0 < \lambda_1 < \lambda_2$

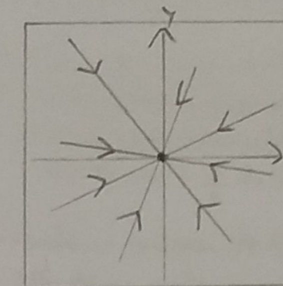


$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$

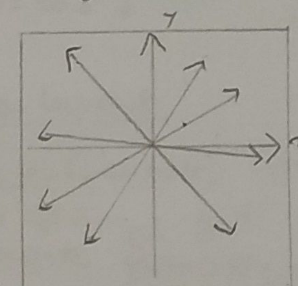


$\lambda_2 > 0 > \lambda_1$

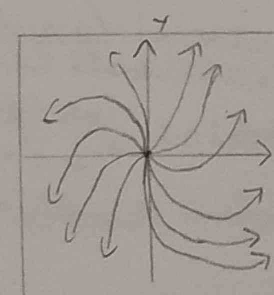
✱ A à une Vp double $\lambda \in \mathbb{R}$



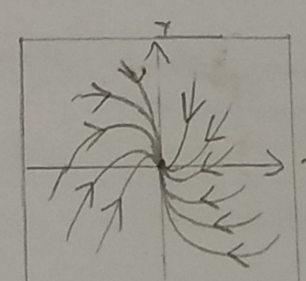
A diagonalisable $\lambda > 0$



A diag $\lambda < 0$

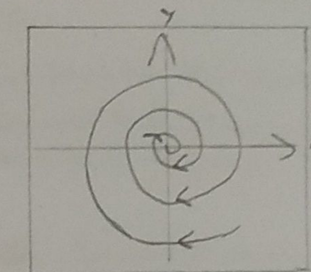


$\lambda > 0$

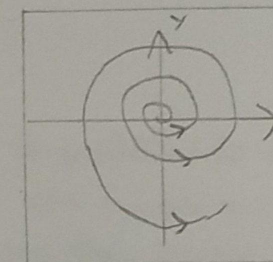


$\lambda < 0$

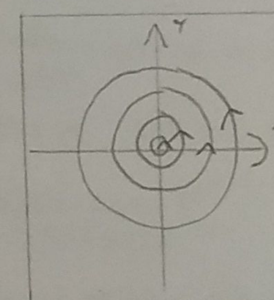
✱ A à des Vp conjugué $\lambda = \alpha \pm i\beta$



$\alpha < 0$



$\alpha > 0$



$\alpha = 0$