220

Equations différentielles $x' = f(t,x)$. Ex d'étude des solutions en dim 1 et 2

I) THEORIE DES EQUATIONS DIFFERENTIELLE

1) Notion de solution

Def 1: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E un Banach et $F : \Omega \subset \mathbb{R} \times E^n \to E$, Ω ouvert. On appelle solution de l'équation différentielle d'ordre n

$$y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (*)$$

toute application $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to E$ n fois dérivable tq : i) $\forall t \in I$, $(t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in \Omega$
ii) $\forall t \in I$, $F(t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) = \varphi^{(n)}(t)$

Rmq 2: Toute équa. diff peut se ramener à une equa diff d'ordre 1. En notant $\phi : I \to E^n$; $t \mapsto (\varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t))$ et $G : \Omega \to E^n$; $(t, y) = (t, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, F(t,y))$ résoudre $(*)$ revient à résoudre $\phi' = G(t, \phi)$

Cadre 3: On considère une equa diff (E) : $y' = f(t,y)$ où $f : U \to \mathbb{R}^n$ est continue et U ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. $(U = J \times \Omega)$

Lemme 4: Une fonction $y : I \to \mathbb{R}^n$ est solution du problème de Cauchy de données initiales (t_0, y_0) si et seulement si :
i) y continue et $\forall t \in I$, $(t, y(t)) \in U$
ii) $\forall t \in I$, $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))\,du$

Def 5: Soient $y : I \to \mathbb{R}^n$ et $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ des solutions de (E). On dit que $\tilde{y}$ est un prolongement de y si $I \subset \tilde{I}$ et $\tilde{y}_{|I} = y$

Def 6: On dit qu'une solution $y : I \to \mathbb{R}^n$ est maximale si y n'admet pas de prolongement $\tilde{y} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ avec $I \subsetneq \tilde{I}$.

Thm 7: Toute solution y se prolonge en une solution maximale $\tilde{y}$ (pas nécessairement unique)

Def 8: Une solution globale est une solution définie sur J tout entier

Rmq 9: Toute solution globale est maximale mais la réciproque est fausse.

Ex 10: (E) : $y' = y^2$ sur $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

2) Existence et unicité des solutions

Thm 11 (Cauchy Lipschitz local)
Soit Ω ouvert de $\mathbb{R} \times E$, $f : \Omega \to E$ continue et localement lipschitzienne par rapport à la 2nde variable.
Alors $\forall (t_0, x_0) \in \Omega$ le problème de Cauchy :
$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$ possède une unique solution maximale $\varphi : I \to E$

Ex 12: (E) : $\begin{cases} y' = \sqrt{|y|} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ sur $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Il y a unicité locale mais pas globale.

Thm 13: Soient $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue, globalement lipschitzienne en la 2nde variable. DEV 1
Alors le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$ $(**)$
possède une unique solution $t \mapsto y(t)$ définie sur I tout entier

App 14: $\begin{cases} u'' = -\sin u \\ u(0) = a \\ u'(0) = b \end{cases}$ (équation du pendule) possède une unique solution définie sur $\mathbb{R}$.

Def 15: Soit $C = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B}(x_0, r_0) \subset \Omega$ un cylindre. Si toute solution $\varphi : I \to E$ de $(**)$, $I \subset [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, a un graphe inclus dans C, on dit que C est un cylindre de sécurité du problème de Cauchy $(**)$.

Rmq 16: $C = [t_0-\alpha, t_0+\alpha] \times \overline{B}(x_0, r_0)$ cylindre inclus dans C_0.
Si $\alpha \leqslant \frac{r_0}{M_f}$, C est aussi un cylindre de sécurité pour (**). $M_f = \max_{C_0} f$

Thm 17: (Cauchy-Peano)
Soit $f : \Omega \to E$ continue, $\Omega \subset \mathbb{R} \times E$ ouvert.
- $C_0 = [t_0 - \alpha_0, t_0 + \alpha_0] \times \overline{B}(x_0, r_0) \subset \Omega$ cylindre
- $C = [t_0-\alpha, t_0+\alpha] \times \overline{B}(x_0, r_0)$ cylindre de sécurité pour (**) inclus dans C_0, où $\alpha \leqslant \min(\alpha_0, \frac{r_0}{M_f})$

Alors le problème de Cauchy (**) admet une solution.
De plus si f est $\mathcal{C}^k$, alors la solution est $\mathcal{C}^{k+1}$.

Coro 18: Soit $f : \Omega \to E$ continue. Alors (**) admet une solution maximale sur un intervalle ouvert.

Coro 19: Soit $f : I \times E \to E$ continue, bornée et localement lipschitzienne par rapport à la 2^{nde} variable.
Alors toute solution maximale du problème (**) est globale.

3) Outils pour l'étude des solutions

Lemme 20 (Gronwall)
Soit u continue de $[0, \alpha] \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ tq $\exists\ a : [0,\alpha] \to \mathbb{R}^+$, $b : [0,\alpha] \to \mathbb{R}^+$
vérifiant $\forall t \in [0,\alpha]$, $u(t) \leqslant b(t) + \int_0^t a(s) u(s) ds$
Alors $u(t) \leqslant b(t) + \int_0^t b(s) a(s) e^{\int_s^t a(z) dz} ds$

Coro 21: Soit $I \subset \mathbb{R}$ ouvert, $u : I \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^1$.
Supposons $\forall t_0 \in I, \forall t \in I$, $\|u'(t)\| \leqslant a\|u(t)\| + b$ où $\begin{cases} a>0, b \geqslant 0 \\ a, b \in \mathbb{R} \end{cases}$
Alors $\forall t \in I$, $\|u(t)\| \leqslant \|u(t_0)\| e^{a|t-t_0|} + \frac{b}{a}(e^{a|t-t_0|} - 1)$

Thm 22 (Théorème des bouts)
Soit $I \subset \mathbb{R}$ ouvert et $U \subset E$ ouvert. $f : I \times U \to E$ continue et lipschitzienne par rapport à la 2^{nde} variable.
Soit $\varphi :]T_-, T_+[\to E$ une solution maximale de (**). Alors
- Si $T_+ < \sup I$, φ sort de tout compact de U (ie si K compact de U, $\exists t < T_+$ tq $\varphi(t) \notin K$)
- Si $T_- > \inf I$, φ sort de tout compact de U (ie si K compact de U, $\exists t > T_-$ tq $\varphi(t) \notin K$.

Ex 23: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée de classe $\mathcal{C}^1$. Alors le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = y f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ admet une unique solution globale.

II) RESOLUTION EXPLICITE ET ETUDE QUALITATIVE

1) Equations remarquables

Thm 24: (Equations linéaires d'ordre 1)
(E): $y' = a(x)y + b(x)$ où $a, b : I \to \mathbb{R}$ continues.
La solution générale s'écrit $y = y_1 + y_0$
où y_1 une solution particulière de (E) et y_0 solution de l'équation homogène (E_0) : $y' = a(x) y$.

Thm 25: Les solutions maximales de (E_0) forment un espace vectoriel de dimension 1, ayant pour base $x \mapsto e^{A(x)}$ où A une primitive de a sur I.

Rmq 26: Pour la solution particulière si aucune solution évidente n'apparait, on utilise la méthode de variation de la constante : on recherche y_1 sous la forme $y_1(x) = \lambda(x) e^{A(x)}$

Ex 27 : $(E) : (1+t^2)y' + 2ty = 1$

Ex 28 : (Equations de Bernoulli)

Ce sont les équations de la forme $(E) : y' = p(x)y + q(x)y^{\alpha}$

avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $p, q : I \to \mathbb{R}$ continue

On a : $(E) \Leftrightarrow \frac{1}{1-\alpha} z' = p(x)z + q(x)$ équation linéaire en $z = y^{1-\alpha}$

Ex 29 (Equations de Ricatti)

Ce sont les équations de la forme $(E) : y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$

$a, b, c : I \to \mathbb{R}$ continue.

$(E) \Leftrightarrow z' = (2a(x)y_1(x) + b(x))z + a(x)z^2$ équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$ où $y = y_1 + z$

Ex 30 : $(E) : (1-x^3)y' + x^2y + y^2 - 2x = 0$

Ex 31 : (Equation de Bessel) $\boxed{\text{DVT 2}}$

$(E) : xy'' + y' + xy = 0$

Il existe une unique solution f DSE en 0 et $f(0) = 1$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$$

Soit g une solution de (E) sur $]0, a[$. Alors :

(f, g) libre $\Leftrightarrow$ f non bornée au voisinage de 0.

2) Etude qualitative

Ex 32 : (Equation du pendule simple)

$(E) : \theta'' + \sin\theta = 0$; $\theta(0) = 0$; $\theta'(0) = \alpha$.

- (E) possède une unique solution $\theta \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
- Si $\alpha > 2$, θ strict croissante
- Si $\alpha = 2$, $\theta(t) = 4\arctan(e^t) - \pi$
- Si $\alpha \in [0, 2[$, θ est périodique

Ex 33 (Système de Lotka-Volterra)

$$\begin{cases} p' = ap - bpr \\ r' = -cr + dpr \end{cases}$$

On représente un modèle de dynamique des populations avec deux espèces (proies / prédateurs)

$p(t)$: quantité de proies en fonction du temps

$r(t)$: quantité de prédateurs en fonction du temps

a, b, c, d constantes > 0

III) Stabilité dans le cas linéaire

Def 34 : un point d'équilibre du système est un point x_0 tq $f(x_0) = 0$

Def 35 : Soit x_0 un point d'équilibre.

- x_0 est dit stable si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq si x solution du système tq $\exists t_0, |x(t_0) - x_0| < \delta$ on a :
  - i) x est définie $\forall t \geq t_0$
  - ii) $\forall t \geq t_0, |x(t) - x_0| < \varepsilon$
- x_0 est dit instable si il n'est pas stable.
- x_0 est dit asymptotiquement stable si :
  $\exists \delta > 0$ tq si x solution du système tq $\exists t_0, |x(t_0) - x_0| < \delta$ on a
  i) x définie $\forall t \geq t_0$ ii) $\lim_{t \to +\infty} x(t) = x_0$

Thm 36 : (Liapounov)

Soit le système différentiel $y' = f(y)$, $y(0) = x$

avec $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ C^1 et $f(0) = 0$. Si la matrice $Df(0)$ à toutes ses vp de partie réelle strictement négative.

Alors 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable.