220

Equations différentielles $x'=f(t,x)$. Exemples d'études des solutions en dimension 1 et 2.

I - ETUDE THEORIQUE DES SOLUTIONS

1 - Premières définitions et problème de Cauchy

Cadre - Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{K}^N$ et $f : U \to \mathbb{K}^N$ une application continue. On considère l'équation différentielle $y'=f(t,y)$ où $(t,y)\in\Omega$. $(\mathcal{E})$

Rem 1 - L'équation différentielle d'ordre n $y^{(n)}=\tilde{f}(t,y,..y^{(n-1)})$ se ramène à l'équation différentielle d'ordre 1 $Y'=F(t,Y)$ avec $F(t,Y)=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ \tilde{f}(t,Y)\end{pmatrix}$ en considérant $Y=\begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y \\ \vdots \\ y^{(n-1)}\end{pmatrix}$.

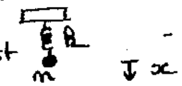
DEF 2 Une solution de $(\mathcal{E})$ est un couple (I,y) où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et y une fonction dérivable de I dans $\mathbb{K}^N$ telle que $\forall t\in I$, $(t,y(t))\in\Omega$ et $y'(t)=f(t,y(t))$.

DEF 3 - Soit $(t_0,y_0)\in\Omega$. Le problème de Cauchy de donnée initiale (t_0,y_0) consiste à trouver la ou les solutions y de $(\mathcal{E})$ sur un intervalle I telles que $t_0\in I$ et $y(t_0)=y_0$.

DEF 4 - L'équation $y'=f(t,y)$ est linéaire si $f(t,y)=A(t)y+B(t)$ où $A : I\to \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathbb{K}^N$.
Sinon, elle est dite non linéaire.

Ex 5 - Oscillateur harmonique amorti : $\begin{cases} x'=y \\ my'=-Fx-ky\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -F/m & -k/m\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}$ est linéaire



(Une masse m est suspendue à un ressort ayant un coefficient de rappel F et un amortissement k ; x : déplacement vertical depuis la position d'équilibre).

Prop 7 - Si $f : \Omega\to\mathbb{K}^N$ est $\mathcal{C}^k$ alors toute solution de $(\mathcal{E})$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.

Prop 8 - Soit $(t_0,y_0)\in\Omega$ - $y : I\to\mathbb{K}^N$ est une solution de $(\mathcal{E})$ telle que $y(t_0)=y_0$ ssi y est continue, $\forall t\in I$ $(t,y(t))\in\Omega$ et $y(t)=y_0+\int_{t_0}^{t} f(s,y(s))\,ds$.

2. Existence et unicité des solutions

DEF 9 - Soient $y_1 : I_1\to\mathbb{K}^N$ et $y_2 : I_2\to\mathbb{K}^N$ deux solutions de $(\mathcal{E})$. y_2 est un prolongement de y_1 si $I_1\subset I_2$ et $y_{2|I_1}=y_1$.

DEF 10 - y est une solution maximale si elle n'admet pas d'autres prolongements qu'elle-même.

DEF 11 - $f:\Omega\to\mathbb{K}^N$ est localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état (y) si $\forall(\tilde{t},\tilde{y})\in\Omega$ $\exists C_0=[\tilde{t}-T,\tilde{t}+T]\times\overline{B}(\tilde{y},r)$, $r>0$, $T>0$, $\exists k>0$ / $\forall (t,y_1),(t,y_2)\in C_0$, $\|f(t,y_1)-f(t,y_2)\|\leq k\|y_1-y_2\|$.

Prop 12 - Si $f\in\mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{K}^N)$ alors f est localement lipschitzienne en la variable d'état.

THm 13 - Soit $f:\Omega\to\mathbb{K}^N$ continue et localement lipschitzienne en la variable d'état. Soit $(t_0,y_0)\in\Omega$. Alors il existe une unique solution maximale $y : I\to\mathbb{K}^N$ de $(\mathcal{E})$ telle que $y(t_0)=y_0$. De plus, I est ouvert. (CAUCHY-LIPSCHITZ)

Ex 14 - • Il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy $\begin{cases} y'=t^2e^y \\ y(0)=y_0, \quad y_0\in\mathbb{R}.\end{cases}$

• $\begin{cases} y'=\frac{1}{t}y^2 \\ y(1)=1\end{cases}$ admet une unique solution maximale définie sur $]0,e[$, égale à $t\mapsto \frac{1}{1-\ln t}$.

App 15 - Soit $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{K}^N$ une solution de $Y'=A(t)Y+B(t)$ où $A\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathcal{M}_N(\mathbb{K}))$, $B\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{K}^N)$ avec A et B 2π-périodiques. Alors φ est 2π-périodique ssi $\varphi(0)=\varphi(2\pi)$.

Ex 16 - La solution maximale de $\begin{cases} y'=y(y-1) \\ y(0)=\frac{1}{2}\end{cases}$ est bornée par 0 et 1.

THm 17 - (CAUCHY-ARZELA-PEANO). Soit $f:\Omega\to\mathbb{K}^N$ continue. Soit $(t_0,y_0)\in\Omega$. Alors il existe $\alpha>0$ et une solution $y : [t_0-\alpha,t_0+\alpha]\to\mathbb{K}^N$ de $(\mathcal{E})$ telle que $y(t_0)=y_0$.

Ex 18 - Les solutions maximales de $\begin{cases} y'=\sqrt{y} \\ y(0)=0\end{cases}$ sont la fonction nulle et les $\tilde{y}_c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$t\mapsto\begin{cases} 0 & \text{pour } t\leq -2c \\ \left(c+\frac{t}{2}\right)^2 & \text{pour } t>-2c\end{cases}, \quad c\in\mathbb{R}.$$

Il n'y a donc pas unicité.

3. Le problème de la globalité

DEF 19 – Soit $\Omega = I \times \mathbb{K}^N$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et Ω' un ouvert de $\mathbb{K}^N$. Une solution globale est une solution définie sur I tout entier.

Prop 20. Une solution globale est maximale.

Cex 21 – $\varphi(t) = \frac{y_0}{1-y_0 t}$ est une solution de $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases}$ définie sur $]-\infty, \frac{1}{y_0}[$ telle que $\varphi(t) \xrightarrow[t \to 1/y_0]{} +\infty$. φ est donc une solution maximale non globale.

DEF 22 – $f : I \times \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^n$ est globalement lipschitzienne en la variable d'état si pour tout intervalle compact $J \subset I$, $\exists k > 0 \ \forall (t, y_1), (t, y_2) \in J \times \mathbb{K}^N$,
$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|$.

Thm 23 – Soit $f : I \times \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^N$ continue et globalement lipschitzienne en la variable d'état. Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^N$. Alors il existe une unique solution globale $y : I \to \mathbb{K}^N$ de (E) telle que $y(t_0) = y_0$.

Cor 24 – (CAUCHY-LIPSCHITZ LINEAIRE). Soit $A \in \mathcal{C}(I, \mathcal{M}_N(\mathbb{K}))$, $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^N)$. Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^N$. Alors il existe une unique solution $y : I \to \mathbb{K}^N$ de $\begin{cases} y' = A(t)y + B(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$.

Lem 25 – (GRONWALL). Soient $T > 0$, $a, u, v \in \mathcal{C}^0([0,T], \mathbb{R}_+)$. Si $\forall t \in [0,T]$, $u(t) \leq a(t) + \int_0^t u(s) v(s)\, ds$ alors
$u(t) \leq a(t) + \int_0^t a(s) v(s) \exp(\int_s^t v(\sigma)\, d\sigma)\, ds$.

App 26 – S'il existe $y > 0$ solution sur $\mathbb{R}$ de $y' = \phi(y)$ avec $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $|\phi(x)| \leq c|x| \ \forall x \in \mathbb{R}$ alors $y(t) \leq y(0) e^{tc}$.

App 27 – Soit $q \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, strictement positive et croissante. Les solutions maximales de $y'' + q(t)y = 0$ sont définies et bornées sur $\mathbb{R}$.

Thm 28 – (SORTIE DE TOUT COMPACT). Soit $f : \Omega \to \mathbb{K}^N$ continue et localement lipschitzienne en la variable d'état. Soit $y :]c, d[\to \mathbb{K}^N$ une solution maximale de (E). Alors $(t, y(t))$ sort de tout compact quand $t \to d$.

Cor 29. Dans le cas où $\Omega =]a, b[\times \mathbb{K}^N$, si $d < b$ alors $\|y(t)\| \xrightarrow[t \to d]{} +\infty$.

Prop 30 – Soit $f :]a, b[\times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ continue et localement lipschitzienne en la variable d'état. Si f est bornée alors toute solution maximale de (E) est globale.

Ex 31. La solution de $\begin{cases} x' = y + x(1 - x^2 - y^2) \\ y' = -x + y(1 - x^2 - y^2) \\ x(0) = x_0 > 0,\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases}$ telle que $0 < x_0^2 + y_0^2 < 1$ est globale.

Thm 32 – (HADAMARD-LEVY). Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$. Alors f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^N$ sur $\mathbb{R}^N$ ssi $\forall x \in \mathbb{R}^N$ $df(x)$ est inversible et $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} \|f(x)\| = +\infty$.

DVT n°1

Ex 33 – $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 ; (x, y) \mapsto (y - \arctan x, x - \frac{\arctan y}{2})$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

II – EXPRESSION EXPLICITE DES SOLUTIONS

1 – Cas des équations différentielles linéaires

Prop 34 – L'ensemble S_H des solutions de $y' = A(t)y$ où $A \in \mathcal{C}(I, \mathcal{M}_N(\mathbb{K}))$ est un sev de $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ de dimension N.

Cor 35 – L'ensemble S des solutions de $y' = A(t)y + B(t)$ où $A \in \mathcal{C}(I, \mathcal{M}_N(\mathbb{K}))$ et $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^N)$ est un $\mathbb{K}$-espace affine de direction S_H.

Prop 36 – Soient $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$. La solution globale de $\begin{cases} y' = a(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ est
$$y(t) = y_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)\, ds} + \int_{t_0}^t b(s) \exp(\int_s^t a(\sigma)\, d\sigma)\, ds.$$

Ex 37 – La solution de $\begin{cases} y' + y = e^t \\ y(-1) = 0 \end{cases}$ est $t \mapsto \frac{1}{2}(e^t - e^{-t+2})$.

Prop 38 – La solution globale de $\begin{cases} y' = Ay + B(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ où $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^N)$ est $t \mapsto e^{(t-t_0)A} y_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} B(s)\, ds$.

Ex 39. Les solutions de $\begin{cases} x' = 2x - y - 5t \\ y' = 3x + 6y - 4 \end{cases}$ sont
$x(t) = \lambda e^{3t} + \mu e^{5t} + 2t + 1$, $y(t) = -\lambda e^{3t} - 3\mu e^{5t} - \mu$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

2. Se ramener au cas linéaire

<u>Prop 39</u>. L'équation $y'+a(t)y=b(t)$ où $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, $a,b\in\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ se ramène à $z'=(n-1)a(t)z+(1-n)b(t)$ par $z=y^{1-n}$.

<u>Ex 40</u> - La solution de $\begin{cases} y'-ty^3+ty=0 \\ y(0)=y_0\in\,]0,1[\end{cases}$ est $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $t\mapsto\frac{1}{\sqrt{1+Ce^{t^2}}}$ où $C=-1+\frac{1}{y_0^2}$.

<u>Prop 41</u>. Soit φ une solution de $y'=a(t)+b(t)y+c(t)y^2$ (*). Par $y=\varphi+z$, (*) devient $z'=(b(t)+2c(t)\varphi(t))z+c(t)z^2$.

III - ETUDE DE LA STABILITE

1 - Points d'équilibre d'un système autonome

<u>DEF 42</u>. Une équation différentielle est autonome si elle est de la forme $y'=f(y)$ où Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $f:\Omega\to\mathbb{R}^N$.

<u>DEF 43</u> - $y_0\in\mathbb{R}^N$ est un point d'équilibre de $y'=f(y)$ si $f(y_0)=0$.

<u>DEF 44</u> - Soit $y_0\in\mathbb{R}^N$ un point d'équilibre de $y'=f(y)$ (A)

- y_0 est dit stable si $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ / si y est une solution de (A) telle que $|y(t_0)-y_0|<\delta$ alors y est définie pour tout $t\geq t_0$ et $|y(t)-y_0|\leq\varepsilon$ pour tout $t\geq t_0$.
- y_0 est asymptotiquement stable si y_0 est stable et s'il existe $\delta>0$ tel que si y est une solution de (A) telle que $|y(t_0)-y_0|<\delta$ alors $y(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}y_0$. (voir annexe)

2. Cas linéaire

<u>Prop 45</u> - Soit $A\in\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ de valeurs propres λ_j. Le point d'équilibre 0 de $y'=Ay$ est

- stable ssi $\forall j$ $\mathrm{Re}(\lambda_j)<0$ ou $\mathrm{Re}(\lambda_j)=0$ et le bloc de Jordan correspondant est diagonalisable
- asymptotiquement stable ssi $\mathrm{Re}(\lambda_j)<0\ \forall j$.

<u>Rem 46</u> - L'allure des trajectoires dépend des valeurs propres (voir annexe)

<u>Ex 47</u> - $\begin{cases} 5x'-8x+9y=0 \\ 5y'-6x+13y=0 \end{cases}$. Posons $e_1=\binom{3}{4}$ et $e_2=\binom{1}{2}$. L'allure des trajectoires est donnée en annexe.

3 - Cas général -

<u>Prop 48</u> - (STABILITE PAR LINEARISATION). Soit $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^N)$ telle que $f(0)=0$. Posons $A=df(0)\in\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ de valeurs propres λ_j. Si $\forall j$ $\mathrm{Re}(\lambda_j)<0$ alors 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

DVT n°2

<u>Ex 49</u> - 0 est un équilibre asymptotiquement stable de $\begin{cases} x'=-2\sin x+y(x-1) \\ y'=e^x-y\cos x+\cos y-2 \end{cases}$.

<u>Rem 50</u> - On ne peut pas conclure si $df(0)$ a une valeur propre λ tq $\mathrm{Re}(\lambda)=0$. Pour $\begin{cases} x'=\alpha x^3 \\ y'=\beta y^3 \end{cases}$, on a $df(0)=(0)$ et 0 est asymptotiquement stable si $\alpha,\beta<0$ et instable si $\alpha>0$ ou $\beta>0$.

<u>Ex 51</u>. Le point d'équilibre $(0,0)$ du pendule avec frottement $\begin{cases} y'=z \\ z'=-C\sin y-kz \end{cases}$ est asymptotiquement stable.

IV - ETUDE QUALITATIVE DES SOLUTIONS

1 - Utilisation du wronskien

<u>DEF 52</u>. Le wronskien d'un système de n solutions $y_1\dots y_n$ de $y'=A(t)y$ est $w(t)=\det(y_1(t),\dots,y_n(t))$, où $A\in\mathcal{C}^0(I,\mathbb{K}^N)$.

<u>Prop 53</u> - $y_1,\dots y_n$ sont des solutions indépendantes de $y'=A(t)y$ ssi $\exists t_0\in I$ / $w(t_0)\neq0$.

<u>App 54</u> - Soit $q:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_0^{+\infty}|q(t)|dt<+\infty$. Alors $y''+q(t)y=0$ admet des solutions non bornées.

<u>App 55</u> - Soient $p,q\in\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$. Soient y,z deux solutions indépendantes de $y''+p(t)y'+q(t)=0$. Soient $t_1<t_2$ deux zéros consécutifs de y. Alors il existe un unique zéro de z dans $]t_1,t_2[$.

2 - Modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra

<u>Cadre</u>: on considère le système $\begin{cases} p'=ap-bpr \\ r'=-cr+dpr \end{cases}$, $a,b,c,d>0$ (LV)

$p(t)$: quantité de proies

$r(t)$: quantité de prédateurs.

<u>Prop 56</u> - Il existe une unique solution maximale au problème (LV), $p(t_0)=p_0$, $r(t_0)=r_0$.

<u>Ex 57</u> - Si $p_0=0$ et $r_0>0$ alors $(p(t),r(t))=(0,r_0e^{-c(t-t_0)})$.

Si $r_0=0$ et $p_0>0$ alors $(p(t),r(t))=(p_0e^{a(t-t_0)},0)$.

Si $r_0=0$ et $p_0=0$ alors $(p(t),r(t))=(0,0)$.

Ces solutions sont définies sur $\mathbb{R}$.

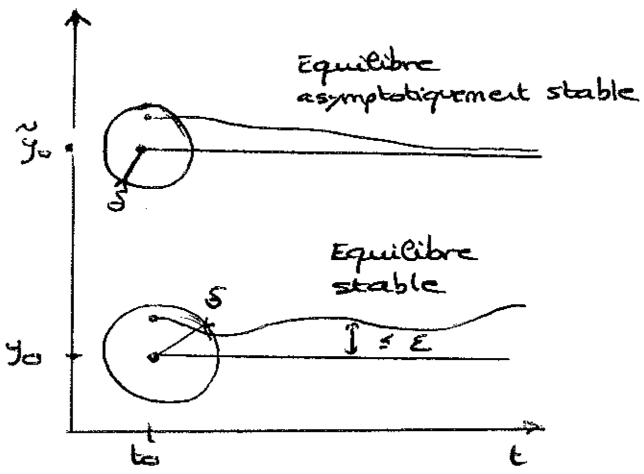
Si $p_0>0$ et $r_0>0$ alors $p(t)>0$, $q(t)>0$.

<u>Prop 58</u> - $H(p,r)=dp+br-c\ln p-a\ln r$ est une intégrale première

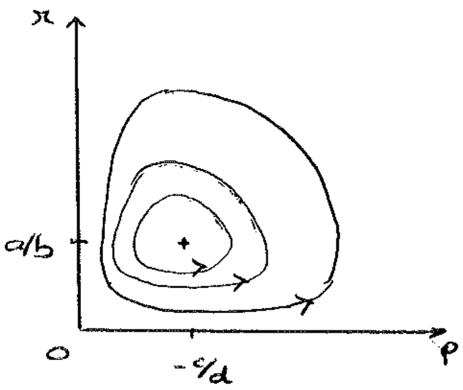
<u>Prop 59</u> - Les solutions sont globales.

<u>Prop 60</u> - Si $p_0,r_0>0$ alors $t\mapsto(p(t),r(t))$ est périodique.

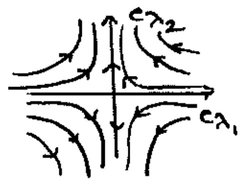
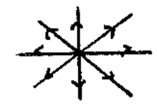
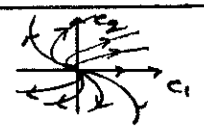
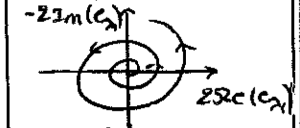
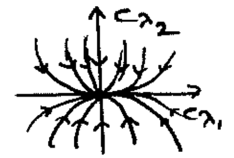
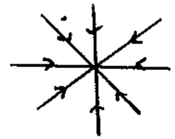
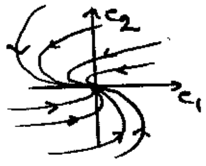
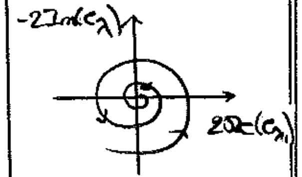
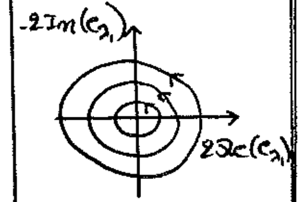
Stabilité d'un équilibre



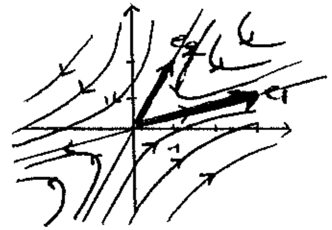
Allure des trajectoires du système de Lotka-Volterra



Allure des trajectoires de $Y' = AY$ où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

	$\lambda_1 \neq \lambda_2$ $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$	$A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$	$A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$	Les valeurs propres de A, λ_1 et λ_2, $\notin \mathbb{R}$.
0 est instable	 $0 < \lambda_1 < \lambda_2$  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	 $\lambda > 0$	 $\lambda > 0$	 $\mathrm{Re}(\lambda_1) > 0$
0 est asymptotiquement stable	 $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	 $\lambda < 0$	 $\lambda < 0$	 $\mathrm{Re}(\lambda_1) < 0$
0 est seulement stable				

Ex 47 :



Références : · Gourdon, analyse.
· Demailly, analyse numérique et équa. diff.
· Berthelin, Equations différentielles
· Rouvière, petit guide de calcul différentiel.