I. Différentiabilité et énoncés fondamentaux

1) Différentielle : $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert

Def 1 : $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$. Si elle existe, on appelle dérivée de f en $a \in \Omega$ dans la direction de $v \in \mathbb{R}^n$: $D_v f(a) := \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t}$

Def 2 : $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ est Gateaux différentiable en $a \in \Omega$ si $D_v f(a)$ existe $\forall v \in \mathbb{R}^n$.

Ex 3 : - $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^5}{(y-x^2)^2+x^2} & \text{si } (x,y) \neq 0_{\mathbb{R}^2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

⚠ Cette application n'est pas continue

Def/prop 4 : $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, f est différentiable en a s'il existe $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ et $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ telles que :

$\forall x \in \Omega$, $f(x) = f(a) + L(x-a) + \|x-a\| \varphi(x)$ avec $\|\varphi(x)\| \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$

i) L est unique appelée différentielle de f en a notée $df(a)$.

ii) Si $df : \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ est continue pour f différentiable sur Ω, alors $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

Notation : $\|x-a\|\varphi(x) = \underset{x \to a}{o}(\|x-a\|)$.

Ex 5 : - $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \Rightarrow f$ différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et $df(x) = f$.

- $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ bilinéaire $\Rightarrow f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ et $\forall \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $df(a_1,a_2)(h_1,h_2) = f(a_1,h_2) + f(h_1,a_2)$

Prop 6 : Soient f, g différentiable en a :

1) f est continue en a.

2) $d(\lambda f + g)(a) = \lambda df(a) + dg(a)$

3) fg différentiable en a et $d(fg)(a)(h) = [df(a)(h)]g(a) + f(a)[dg(a)(h)]$.

4) Soit $f = (f_1, \dots, f_m)$, [f_i différentiable en a $\forall i \leq m$] $\Rightarrow$ [f différentiable en a] et $df(a) = (df_1(a), \dots, df_m(a))$.

5) f différentiable en $a \Rightarrow f$ Gateaux différentiable en a.

Th 7. (TFC) $f : \Omega_1 \to \mathbb{R}^m$, $g : \Omega_2 \to \mathbb{R}^k$, $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$, f différentiable en a, g différentiable en $f(a)$ $\Rightarrow g \circ f$ différentiable en a et : $d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$

Ex 8 : - $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|^2$ est $\mathcal{C}^1$ et $df(a)(h) = 2\langle a, h \rangle$

- $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$ et $d(\det)(M)(H) = \operatorname{Tr}({}^t\operatorname{Com}(M) H)$.

App 9 : Soient $(y_1, \dots, y_n)$ des solutions du système $y' = A(t)y$. On pose $w(t) = \det(y_1(t), \dots, y_n(t))$, on a $w(t) = w(0) e^{\int_0^t \operatorname{Tr}(A(s))\,ds}$.

2) Dérivées partielles :

Def 10 : $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, on pose $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) := D_{e_j} f(a)$ la dérivée partielle de f en a par rapport à x_j.

Prop 11 : f différentiable en $a \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ existe $\forall j \in [\![1, n]\!]$ et $df(a)(h) = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ avec $h = (h_1, \dots, h_n)$.

⚠ La réciproque est fausse d'après l'exemple 3 et la prop 6.

Prop 12 : Équivalence entre : (i) $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$
(ii) $\forall j \leq n$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ existe et est continue.

Ex 13 : - Étude d'une intégrale à paramètre $f(x) = \int_\Lambda g(x,\lambda)\,d\lambda$.

Def 14 : Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ différentiable. On pose le gradient de f en x, $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$. $\nabla f(x)$ est l'unique vecteur de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ vérifiant $\langle \nabla f(x), h \rangle = df(x)(h)$.

Def 15 : $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, f différentiable en a. On appelle jacobienne de f la matrice $Jf(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{(i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!]}$ avec $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$.

App 16 : - $|\det Jf(x)|$ intervient dans la formule des changement de variable dans une intégrale.
- f holomorphe $\Leftrightarrow$ sa jacobienne est une matrice de similitude.

3) Inégalité des accroissements finis :

Th 17 : $x, y \in \Omega$, $[x,y] \subset \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ différentiable et $\phi \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ dérivables telles que :
$\|df(x+t(y-x))(y-x)\| \leq \phi'(t) \quad \forall t \in [0,1[$.
Alors $\|f(y) - f(x)\| \leq \phi(1) - \phi(0)$.

Cor 18 : - $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x-y\| \sup_{[x,y]} \|df\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)}$
- $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^m) \Rightarrow f$ localement lipschitzienne.

App 19 : - Théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique aux fonctions $\mathcal{C}^1$.

Prop 20 : Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, Ω connexe : f constante $\Leftrightarrow df(x) = 0 \ \forall x$.

App 21 : Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$, $\left| f(n) - \int_n^{n+1} f \right| \leq \frac{1}{2} \max |f'(x)|, x \in [n, n+1]$

4) Formules de Taylor et différentielle d'ordre supérieure :

Def 22 : Par récurrence, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ est k fois différentiable en $a \Rightarrow f$ est différentiable et df est $k-1$ différentiable.
On note $d^k f$ la k ième différentielle, on la considère comme n-linéaire.
$f \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^m) \Rightarrow df \in \mathcal{C}^{k-1}(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

Prop 23 : $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^m) \Leftrightarrow \forall j, \frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathcal{C}^{k-1}(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

Th 24 : (Schwartz) Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$ existe et sont continues
Alors ces fonctions sont égales.

Th 24 : (Taylor-Young) f n-fois différentiable en a, alors
$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(a)(h, \dots, h) + o(\|h\|^n)$

App 25 : f holomorphe $\Rightarrow \Delta(\mathrm{Re}(f)) = 0$

II. Théorème d'inversion locale, des fonctions implicites et applications

1) Théorème d'inversion locale :

Def 26 : $f : \Omega \to F$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, F)$ bijective et $f^{-1} \in \mathcal{C}^1(F, \Omega)$. ($F$ est un ouvert de $\mathbb{R}^m$)

Th 27 : (TIL) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, $a \in \Omega$ telles que $df(a)$ soit une bijection. Alors $\exists V$ voisinage de a, W voisinage de $f(a)$ tels que f soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V sur W. Si $f \in \mathcal{C}^k$, alors $f^{-1} \in \mathcal{C}^k$.

Ctre-ex 28 : - $\mathcal{C}^1$ nécessaire : $f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin(\pi/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Cor 29 : - Si f est injective alors f est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de Ω vers $f(\Omega)$ si on suppose $df(x)$ inversible $\forall x \in \Omega$.

App 30 : - $f : \begin{cases} M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}) \\ B \mapsto B^k \end{cases}$ est un difféomorphisme sur un voisinage de I_n dans un voisinage de I_n.

- $\exists r > 0$ tel que si $G \leq GL_n(\mathbb{R})$, $G \subset B(I_n, r)$, alors $G = \{I_n\}$.
(on se sert de la différentielle de exp en 0).

2) Théorème des fonctions implicites :

Th 31 : (TFI) Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ et $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^k)$, $(a,b) \in U$ telle que $f(a,b) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ soit une bijection avec $f_a(a, \cdot) = f_y$. Alors il existe V un voisinage de a, W un voisinage de b, $V \times W \subset U$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1(V, W)$ tels que $(x \in V, y \in W, f(x,y) = 0) \Rightarrow [x \in V$ et $y = \varphi(x)]$
Si $f \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^k)$, alors $\varphi \in \mathcal{C}^k(V, W)$.

App 32 : - le folium $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^3 + y^3 - 3xy = 0\}$ admet comme tangente en $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}, (2^{2/3}, 2^{1/3})\}$ la droite
$y(x) = b + \frac{b - a^2}{b^2 - a}(x - a)$.

- $\exists! \, (x,y)(t)$ solution au système $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \sin(x+y) + t - 1 \\ y = \frac{1}{2} \cos(x-y) - t + \frac{1}{2} \end{cases}$
de plus (x,y) est $\mathcal{C}^\infty$.

- les polynômes scindés à racines simples de $\mathbb{R}_n[X]$ forment un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$.

3) Applications :

Dev Thibault

Th 33 : (Brouwer) Soit $f : \overline{B}(0,1) \to \overline{B}(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ continue. Alors f admet un point fixe.

App 34 : - (Jordan) Soit γ une courbe fermée simple. $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ admet exactement deux composantes connexes distinctes dont une seule est bornée.

Def/Prop 35 : $p \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, $k \in [\![1,n]\!]$. $N \subset \mathbb{R}^n$ est une sous variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension k et de classe $\mathcal{C}^p$ si $\forall x_0 \in N$, $\exists W$ voisinage de x_0 tel que un des énoncés équivalents a lieu :

(i) $\exists \varphi : W \to \mathbb{R}^n$ un $\mathcal{C}^p$-difféomorphisme tel que $\varphi(N \cap W) = \varphi(W) \cap [\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}]$

(ii) $\exists u : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$ de classe $\mathcal{C}^p$ et $A \in GL_n(\mathbb{R})$ tels que $W \cap N = \{A(y, u(y)),\ y \in \mathbb{R}^k\} \cap W$.

(iii) $\exists F : W \to \mathbb{R}^{n-k}$ de classe $\mathcal{C}^p$ telle que $dF(x_0)$ soit surjective et $W \cap N = F^{-1}(\{0\})$.

(iv) $\exists U$ voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^k$ et $j : U \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^p$ telle que $j(0) = x_0$, $dj(0)$ est injective et $j : U \to W \cap N$ est une bijection bi-continue.

Def 52 : N sous variété $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in N$, L'espace tangent à N en x_0 noté $T_{x_0}N$ est $T_{x_0}N = \{\gamma'(0),\ \gamma \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n),\ I$ intervalle ouvert contenant 0, $\gamma(I) \subset N,\ \gamma(0) = x_0\}$

Th 53 : (rang constant) Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$, $f : U \to \mathbb{R}^p$ $\mathcal{C}^1$. Si $rg(df(x)) = r$ $\forall x \in U$, alors il existe :
- φ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme d'un voisinage V de 0 de $\mathbb{R}^n$ dans U avec $\varphi(0) = a$
- ψ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme d'un ouvert de $\mathbb{R}^p$ contenant $f(\varphi(V))$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$

tels que $\forall x \in V$, $\psi \circ f \circ \varphi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$.

Dev Thomas

Lemme 54 : (Morse) Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$, $U \subset \mathbb{R}^n$ contenant 0. On suppose que $df(0) = 0$ et que $d^2f(0)$ est non dégénérée de signature $(p, n-p)$. Alors $\exists \varphi$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre deux voisinages de l'origine tel que $\varphi(0) = 0$ et
$$f(x) - f(0) = \varphi_1^2(x) + \dots + \varphi_p^2(x) - \varphi_{p+1}^2(x) - \dots - \varphi_n^2(x).$$

III. Optimisation et calcul différentiel :

1) Points fixes et extremas sans contrainte :

Def 55 : a est un point critique de f si f est différentiable en a et $df(a) = 0$.

Def 56 : Si f est deux fois différentiable, $d^2f(a)$ est une forme bilinéaire symétrique. On appelle Hessienne de f en a la matrice $Hess(f)(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ qui est symétrique.

Prop 57 : $a \in \Omega$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$:

(i) Si f est différentiable en a et admet un extremum local en a, $df(a) = 0$

(ii) Si $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$, admet un minimum local en a alors $df(a) = 0$ et $d^2f(a) \geq 0$ (forme quadratique positive).

(iii) Si $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ admet un point critique en a et $d^2f(a) > 0$ alors a est un minimum local de f.

⚠ (i) n'est pas une équivalence, voir $x \mapsto x^3$.

Prop 58 : Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ convexe différentiable, équivalence :

(i) c un minimum global de f.

(ii) $df(c) = 0$.

Prop 59/def 59 : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ propre, ie $\|f(x)\| \xrightarrow[\|x\| \to \infty]{} +\infty$. et différentiable, alors f admet un point critique.

Dev

Th 60 : (Hadamard-Lévy) Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. équivalence

(i) f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

(ii) f est propre et $df(x)$ est inversible $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

App 61 : - recherche d'un estimateur de maximum de vraisemblance
- $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle$ admet un unique minimum sur $\mathbb{R}^n$.

2) Optimisation ~~avec~~ contraintes :

Th 62 : (Extrema liés) Soit $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, N une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et $x_0 \in N$, si $g_{|N}$ admet un extremum local en x_0 alors $T_{x_0}N \subset \ker(dg(x_0))$

Cor 63 : $N = \{x \in U,\ f_1(x) = \dots = f_{n-k}(x) = 0\}$ avec $df_1(x_0), \dots, df_{n-k}(x_0)$ des formes linéaires indépendantes. Alors $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}$ tels que $dg(x_0) = \lambda_1 df_1(x_0) + \dots + \lambda_{n-k} df_{n-k}(x_0)$.

App 64 : - Théorème spectrale.