214

Applications du théorème d'inversion locale et du théorème des fonctions implicites

I - Le théorème d'inversion locale

1) Théorèmes généraux

Théorème: (Inversion locale) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^k$. Soit $a \in \Omega$. Si $df(a)$ est inversible alors il existe U et V, des voisinages ouverts de a et $f(a)$, tels que $f : U \to V$ soit un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme.

Ex: $f : (x;y) \mapsto (x^3 y ; x-y)$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme sur un voisinage de $(1;1)$

Cor: Inversion globale.
Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^k$ avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si $df(a)$ est inversible pour tout $a \in \Omega$ et si f est injective alors $f(\Omega)$ est ouvert et $f : \Omega \to f(\Omega)$ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme.

Contre-exemple: $f(x;y) \mapsto (x^2-y^2 ; 2xy)$ est un difféomorphisme locale en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$ mais n'est pas un difféomorphisme globale : $f(1;0) = f(-1;0)$.

Th: Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et injective. Alors $f(U)$ est ouvert et f est un biholomorphisme de U sur $f(U)$.

2) Applications du théorème d'inversion locale

Prop: (immersion)
Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ $\mathcal{C}^1$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ avec $n \leq p$. Si $a \in \Omega$ vérifie $rg(df(a)) = n$ alors il existe $g : U \to V$ $\mathcal{C}^1$, U et V ouvert, $f(a) \in U$, telle que pour x proche de a $g(f(x)) = (x_1 ; \dots ; x_n ; 0 ; \dots ; 0)$

Prop: (submersion)
Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ $\mathcal{C}^1$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq p$. Si $a \in \Omega$ vérifie $rg(df(a)) = p$ alors il existe $g : U \to V$ $\mathcal{C}^1$, U et V ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in V$, telle que $\forall x \in U$ $f(g(x)) = (x_1 ; \dots ; x_p)$

Th: (du rang constant)
Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$. On suppose $rg(df(\cdot)) = r$ sur Ω. Soit $a \in \Omega$. Il existe U_a un voisinage ouvert de a, $V_{f(a)}$ un voisinage ouvert de $f(a)$ et $\varphi : V \to U_a$, $\psi : V_{f(a)} \to W$ des $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes tels que :
$\forall x \in V$ $\psi \circ f \circ \varphi(x) = (x_1 ; \dots ; x_r ; 0 ; \dots ; 0)$.

Appli: $\{x \in \Omega / f(x) = \lambda\}$ est une sous-variété de dimension $n-r$.

Th: (Lemme de Morse)
Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^3$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$. On suppose que $df(0) = 0$ et que $d^2 f(0)$ est de signature $(p; n-p)$.
Alors il existe U et V deux voisinages de 0 et $\varphi : U \to V$, $\varphi(0) = 0$, telle que :
$$\forall x \in U \quad f(x) - f(0) = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x)^2 - \sum_{i=p+1}^{n} \varphi_i(x)^2$$

Rq: C'est en quelque sort l'analogue du théorème du rang constant à l'ordre 2.

Appli: si $n = 2$ et $p = 1$, la courbe de niveau $f(x;y) = f(0;0)$ admet un point double à l'origine. Le couple des tangentes a pour équation
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0;0)x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0;0)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0;0)y^2 = 0$$

Prop: il existe U un voisinage de 0 et V un voisinage de I_n tel que $\exp : U \to V$ réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme

Cor1: Il n'existe pas de sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ arbitrairement petit.

Cor2: $\operatorname{Exp} : M_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Th: (Brouwer)
Soit $f : \overline{B}(0;1) \to \overline{B}(0;1)$ continue
f admet un point fixe) DVP

Cor : Soit $x \mapsto V(x)$ un champ de vecteur continue sur $\overline{B}(0;1)$ vérifiant :
$\forall \|x\|=1 \quad \langle V(x);x\rangle < 0$.
Alors $\exists x \in \overline{B}(0;1) \; V(x)=0$

Th : (Redressement du flot)
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x) \neq 0$.
Alors il existe $\tau > 0$, $r > 0$ et H un hyperplan tel que le flot de $\dot{u} = f(u)$ (noté $\varphi_t(y)$) définisse un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]-\tau;\tau[\times (x + H \cap B(0;r))$ sur son image.

Cor : (du théorème de Brouwer de redressement du flot)
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe K un compact convexe invariant par le flot de $\dot{u} = f(u)$. Alors K contient un zéro de f.

II - Théorème des fonctions implicites et géométrie

a) Fonctions implicites

Th : (des fonctions implicites)
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ et $(a;b) \in U$.
Soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application de classe $\mathcal{C}^k$ telle que $f(a;b) = 0$ et telle que $\partial_y f(a;b)$ soit inversible. Alors il existe V voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^n$, W voisinage ouvert de b dans $\mathbb{R}^p$, $V \times W \subset U$, et $\varphi : V \to W$ de classe $\mathcal{C}^k$, unique, telle que

$((x;y) \in V \times W$ et $f(x;y) = 0) \iff (x \in V$ et $y = \varphi(x))$

et $\partial_y f(x;y)$ inversible sur $V \times W$.

Ex : pour le cercle $x^2+y^2-1=0$, $y = \sqrt{1-x^2}$ pour $(x;y) \in]-1;1[\times]0;1]$. Si $y<0$, $y = -\sqrt{1-x^2}$.
On a bien $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = 2y \neq 0$ si $y \neq 0$
Au voisinage de $(1;0)$ et $(-1;0)$, y ne peut s'exprimer comme fonction de x.

Prop : Sous les hypothèses du théorème précédent on a $d\varphi(x) = -(\partial_y f(x;\varphi(x)))^{-1} \circ \partial_x f(x;\varphi(x))$

Ex : $f : (x;y) \mapsto \sin(y) + xy^4 + x^2$
au voisinage de $(0;0)$, $y = \varphi(x)$ et $\varphi'(0) = 0$.

b) Géométrie

Déf : • Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ et $a \in V$. V est dit lisse en a, de dimension $d \in [\![1;n]\!]$, s'il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme F d'un voisinage ouvert U de a dans $\mathbb{R}^n$ sur $F(U)$ contenant 0 tel que
$F(V \cap U) = \mathbb{R}^d \times \{0\} \cap F(U)$
• V est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ si V est lisse en chacun de ses points (dimension d)

Ex : Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, Ω est une sous-variété de dimension n.

Contre-exemple : $\{y = x\} \cup \{y = -x\}$ n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$.

Th : (caractérisations des sous-variétés)
Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ et $a \in V$, $d \in [\![1;n]\!]$. Sont équivalentes :
(i) V est lisse en a de dimension d.
(ii) Il existe un voisinage ouvert U de a dans $\mathbb{R}^n$ et une submersion $f : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que
$(x \in V \cap U) \iff (x \in U$ et $f(x) = 0)$
(iii) Il existe un voisinage ouvert U de a dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert de $(a_1;\dots;a_d)$ V et $n-d$ fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ $g_i : U' \to \mathbb{R}$ telles que (à permutation des coordonnées près)
$$(x \in V \cap U) \iff \begin{cases} (x_1;\dots;x_d) \in U' \\ x_{d+1} = g_1(x_1;\dots;x_d), \dots, x_n = g_{n-d}(x_1;\dots;x_d) \end{cases}$$

(iv) Il existe U un voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^n$, Ω voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^d$ et n fonctions $\varphi_i : \Omega \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, telles que

$\varphi : (u_1;\dots;u_d) \mapsto (\varphi_1(u_1;\dots;u_d);\dots;\varphi_n(u_1;\dots;u_d))$

soit un homéomorphisme de Ω sur $V \cap U$, $a = \varphi(0)$ et $d\varphi(0)$ injective.

Ex : $\{y = x^2\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$

$\mathcal{E} = \{x^2+y^2-1=0\}$ aussi, $\{(2\cos(t);3\sin(t)) / t \in \mathbb{R}\}$ aussi

Elles sont de dimension 1.

Déf : Soit V une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension d et $a \in V$. $v \in \mathbb{R}^n$ est dit tangent à V en a si il existe $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$, $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$.

Prop : Soit V une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension d et $a \in V$. Si T_aV désigne l'ensemble des vecteurs tangents à V en a, T_aV est un espace vectoriel de dimension d.

On peut caractériser T_aV :

(ii) dans ce cas, $T_aV = \mathrm{Ker}(df(a))$

(iii) T_aV est le graphe de $dg(a_1;\dots;a_d)$

(iv) $T_aV = \mathrm{Im}(d\varphi(0))$

Ex : • $O_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont l'espace tangent en I_n est $A_n(\mathbb{R})$

• $SL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de dimension n^2-1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont l'espace tangent en I_n est $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \mathrm{Tr}(M) = 0\}$.

Prop : • L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r forme une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2-(n-r)^2$.

• L'ensemble des projecteurs orthogonaux sur $\mathbb{R}^n$ de rang r est une sous-variété de $S_n(\mathbb{R})$ de dimension $r(n-r)$.

Th : (Cartan - Von Neumann)

Soit V un sous-groupe fermé non discret de $GL_n(\mathbb{R})$. Alors V est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Rq : On retrouve le fait que $O_n(\mathbb{R})$ et $SL_n(\mathbb{R})$ sont des sous-variétés de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Th : (Extrema liés)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f, g_1, \dots, g_r$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de Ω dans $\mathbb{R}^n$

Soit $\Gamma = \{x \in U / \forall i \in [\![1;r]\!]\ g_i(x) = 0\}$.

Si $a \in \Omega$ et si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum relatif en a, alors, si $(dg_i(a))_{1\le i\le r}$ est libre, $df(a) \in \mathrm{Vect}(dg_1(a);\dots;dg_r(a))$.

Cor : On suppose de plus que $g = (g_1;\dots;g_r)$ est une submersion. Alors Γ est une sous-variété de dimension $n-r$ et si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum en a, $df(a) \in \mathrm{Vect}(dg_1(a);\dots;dg_r(a))$.

Cor : (Inégalité d'Hadamard)

Soit $(v_i)_{1\le i\le n} \in (\mathbb{R}^n)^n$. Alors $|\det(v_1;\dots;v_n)| \le \prod_{i=1}^{n} \|v_i\|_2$

Cor : Les matrices de $SO_n(\mathbb{R})$ sont les matrices de norme minimale dans $SL_n(\mathbb{R})$ pour $\|M\|^2 = \mathrm{tr}({}^tMM)$

Cor : Sur un billard elliptique, il existe une trajectoire fermée à n rebonds pour tout $n \ge 2$.

$\varphi \tau T$ ☼ π

Développement : Point fixe de Brouwer
Léo Bigorgne et Joackim Bernier
Référence : article d'Alexis Monier (lien en bas de la page wikipédia du théorème de Brouwer).

Théorème : Notons $B := \overline{B_2}(0,1) \subset \mathbb{R}^N$, si $f \in \mathcal{C}^0(B;B)$ alors f admet un point fixe.

lemme principal : il n'existe pas de rétraction $\mathcal{C}^1$ de la boule fermée dans la sphère.
dem : Par l'absurde, soit $f \in \mathcal{C}^1(B, \partial B)$ telle que $f(x) = x$ pour $x \in \partial B$.

Notons pour $0 \leq t \leq 1$, $\phi_t(x) := (1-t)x + tf(x) \in B$. Et introduisons $\alpha > 0$ tel que tout $0 \leq t \leq \alpha$,

$$0 \leq ||df||_\infty \frac{t}{1-t} < 1.$$

Alors pour $0 \leq t \leq \alpha$, ϕ_t vérifie les propriétés suivantes.

— ϕ_t est injective,

$$\begin{aligned} |\phi_t(x) - \phi_t(y)| &\geq (1-t)|x-y| - t|f(x) - f(y)| \\ &\geq (1-t)|x-y|(1 - ||df||_\infty \frac{t}{1-t}). \end{aligned}$$

— $d\phi_t$ est inversible sur $\mathring{B}$,

$$d\phi_t(x) = (1-t)(id + \frac{t}{1-t} df(x))$$

Mais $||\frac{t}{1-t} df(x)|| \leq ||df||_\infty \frac{t}{1-t} < 1$, donc $\phi_t(x) \in GL_n(\mathbb{R})$.

— Par le théorème d'inversion locale ϕ_t est un C^1 difféomorphisme local sur $\mathring{B}$. A fortiori, ϕ_t envoie un ouvert de $\mathring{B}$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^N$, donc $\phi_t(\mathring{B})$ est ouvert et $\phi_t(\mathring{B}) \subset \mathring{B}$.

— $\phi_t(\mathring{B})$ est fermé relativement à $\mathring{B}$, en effet, si

$$x_n \in \mathring{B}, \; \phi_t(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} y \in \mathring{B},$$

alors par compacité de la boule unitée fermée,

$$\exists (n_i), \exists x \in B, \; x_{n_i} \xrightarrow[i\to\infty]{} x.$$

Par continuité de ϕ_t, $f(x) = y$. Par l'absurde si $x \in \partial B$, alors $x = \phi_t(x) = y \in \mathring{B}$ ce qui serait contradictoire. Donc $x \in \mathring{B}$. *(c'est uniquement ici que l'on utilise l'hyposèse de rétraction).*

— $\mathring{B}$ étant connexe, $\phi_t(\mathring{B}) = \mathring{B}$.

On vient donc de démontrer que pour t assez petit ϕ_t est un C^1 difféomorphisme de la boule ouverte dans elle même.

On pose

$$P(t) := \int_{\mathring{B}} \det d\phi_t(x) \; dx.$$

En supposant toujours $0 \leq t \leq \alpha$, $\det d\phi_t(x) \neq 0$ et $t \mapsto det d\phi_t(x)$ est continue, de plus $\det d\phi_t(x) = \det id = 1$, donc par le théorème des valeurs intermidiaires, $\det d\phi_t(x) > 0$.
On obtient donc par la formule de changement de variables $y = \phi_t(x)$,

$$P(t) = \int_{\mathring{B}} 1 dy.$$

Or par n-linéarité du déterminant, $P(t) \in \mathbb{R}_n[t]$. P étant constant sur un intervalle, il est constant partout.
$||f(x)||_2^2 = 1$, donc

$$\forall h \in \mathbb{R}^N, \; < df(x)(h), f(x) >= 0.$$

Autrement dit $f(x) \in Im(df(x))^\perp$, donc $df(x)$ n'est pas surjective, ainsi

$$P(1) = \int_{\mathring{B}} \det d\phi_1(x) \; dx = \int_{\mathring{B}} \det df(x) \; dx = 0,$$

Mais $P(1) = \int_{\mathring{B}} 1 dy \neq 0$, ce qui est exclu. $\square$

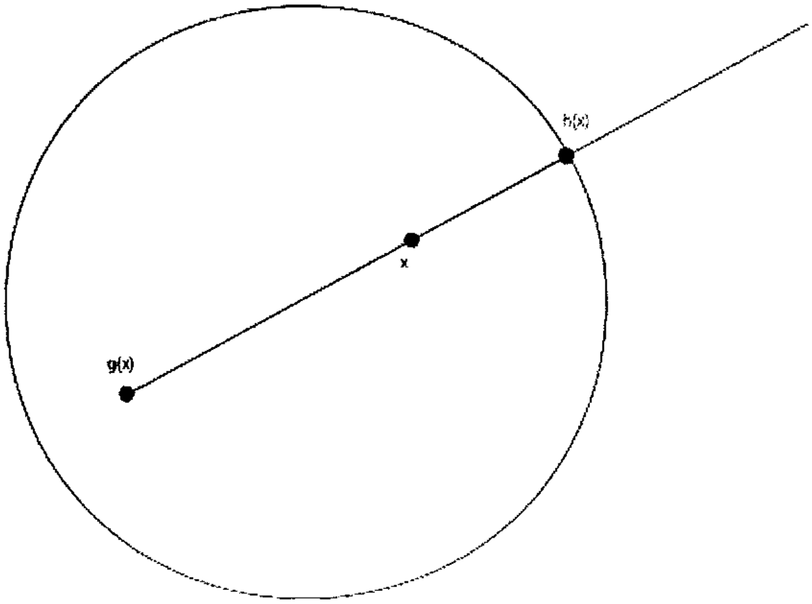
démonstration du théorème de Brouwer : *(rapide pour avoir le temps)*
Par l'absurde on suppose que f n'a pas de point fixe. Donc par compacité de la boule unité et continuité de f,

$$\exists \eta > 0,\ |f - id|_\infty > 2\eta.$$

Mais par densité de $\mathcal{C}^1(B;B)$ dans $\mathcal{C}^0(B;B)$,

$$\exists g \in \mathcal{C}^1(B;B),\ |g - f|_\infty < \eta.$$

Donc $|g - id|_\infty > \eta$. *on vient donc de construire une fonction C^1 de la boule dans la boule sans point fixe.*
On pose alors $h(x)$ l'intersection entre]g(x),x) et ∂B :



h est une rétraction C^1 car, $h(x) = g(x) + t_x x$ où t_x est l'unique réel strictement positif, solution de l'équation polynomiale de dégré 2, $||g(x) + t(x - g(x))||_2^2 = 1$, et donc t_x peut être explicité par une fonction régulière en x. □

détails pour montrer que t_x est régulière : En notant $Q(t) = ||g(x) + t(x - g(x))||_2^2$ alors par convexité de la boule unitée, $Q(t) \leq 1$ pour $0 \leq t \leq 1$. Donc $Q - 1$ admet une racine inférieur à 0 et une supérieure à 1. Donc si Δ est le discriminant, $\Delta > 0$. Or Δ est C^1 en x. En écrivant la formule

$$t_x = \frac{-g(x).(x - g(x)) + \sqrt{\Delta}}{||x - g(x)||_2^2},$$

on a bien montré que h est C^1.

Développement : Sous variétés en lien avec le rang
Léo Bigorgne et Joackim Bernier
Référence : Rouvière *petit guide de calcul différentiel* exercice 95.

1 Matrice de rang fixé

Prop : Soit V l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ de rang r. Alors V est une sous variété de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2-(n-r)^2$.

On note U l'ensemble des matrices dont le mineur principal de taille r est non nul.

lemme : $X := \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in V \cap U$ où $A \in M_r(\mathbb{R})$ si et seulement si $A \in GL_r(\mathbb{R})$ et $D = CA^{-1}B$.

demo : " $\Rightarrow$ " $X \in U$ signifie $detA \neq 0$, ce qui équivaut à $A \in GL_r(\mathbb{R})$. Les r premières colonnes de X sont donc libres. Or X est de rang r donc les colonnes suivantes de X sont combinaisons linéraires des premières. Ce qui se code matriciellement :

$$\exists M \in M_{n,n-r}(\mathbb{R}),\ \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} M$$

Et encore puisque A est inversible,

$$\begin{cases} M = A^{-1}B, \\ D = CM = CA^{-1}B. \end{cases}$$

" $\Leftarrow$ " Les calculs précédents montrent que $D = CA^{-1}B$ implique que les $n-r$ dernières lignes sont combinaisons linéaires des r premières et qu'ainsi X est de rang r. $\square$

D'après le lemme, $V \cap U$ est le graphe de,

$$\begin{array}{cccc} \Psi & : & \Omega := GL_r(\mathbb{R}) \times M_{n-r,r}(\mathbb{R}) \times M_{r,n-r}(\mathbb{R}) & \to & M_{n-r}(\mathbb{R}) \\ & & (A,B,C) & \mapsto & D - CA^{-1}B \end{array}.$$

Puisque $GL_r(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_r(\mathbb{R})$, Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ où

$$d = r^2 + r(n-r) + (n-r)r = n^2 - (n-r)^2.$$

Ψ est $\mathcal{C}^1$ car l'inverse est $\mathcal{C}^1$ sur $GL_r(\mathbb{R})$. Enfin U est ouvert de $M_n(\mathbb{R})$ par continuité du mineur principal de taille r. Donc V est lisse en tout point $V \cap U$, de dimension d. En notant M_σ la matrice de permutation associée à σ, alors puisque tout matrice de rang r a au moins un mineur de taille r non nul,

$$V = \bigcup_{\sigma \in S_n} M_\sigma^{-1}(V \cap U) M_\sigma.$$

$X \mapsto M_\sigma^{-1} X M_\sigma$ étant linéaire bijective c'est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme. Ce qui prouve donc que V est une sous variété de dimension d.

2 Projecteurs orthogonaux de rang fixé

Prop : L'ensemble des projecteurs orthogonaux sur $\mathbb{R}^n$ de rang r est une sous variété de $S_n(\mathbb{R})$ de dimension $r(n-r)$.

demo : Notons P l'ensemble des projecteurs orthogonaux de rang r. Alors par définition $P \subset S_n(\mathbb{R})$. Montrons dans un premier temps que P est lisse en $J := \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de dimension $r(n-r)$.

Soit $X := \begin{pmatrix} A & {}^tB \\ B & C \end{pmatrix} \in P \cap U$. X étant de rang r et dans U alors, d'après le lemme, A est inversible et

$$C = BA^{-1t}B.$$

Mais, X étant un projecteur, $X^2 = X$, donc équation qui se réécrit en terme de blocs

$$\begin{cases} A^2 + {}^tBB = A, \\ BA + CB = B, \\ C^2 + B^tB = C. \end{cases}$$

En remplaçant C par son expression en fonction de A et B, les deux dernières équations sont des conséquences de la première :

$$A^2 - A + {}^tBB = 0.$$

Réciproquement il est clair que si $X \in U \cap S_n(\mathbb{R})$ vérifie cette dernière équation et l'équation sur C alors $X \in P$. Donc en notant

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & U \cap S_n(\mathbb{R}) & \to & S_r(\mathbb{R}) \times S_{n-r}(\mathbb{R}) \\ & & \begin{pmatrix} A & {}^tB \\ B & C \end{pmatrix} & \mapsto & (A^2 - A + {}^tBB, C - BA^{-1}{}^tB) \end{array}$$

alors $\Phi^{-1}(\{0\}) = U \cap P$. Mais Φ est C^1 par composition et $d\Phi(J)(\begin{pmatrix} A & {}^tB \\ B & C \end{pmatrix}) = (A, C)$. Donc $d\Phi(J)$ est surjective. Ainsi P est lisse en J de dimension $r(n-r)$. Enfin par le théorème spectral, tout projecteur orthogonal est orthosemblable à J donc

$$P = \bigcup_{Q \in O_n(\mathbb{R})} {}^tQJQ.$$

Puisque $M \mapsto {}^tQMQ$ est un difféormorphime, P est bien une sous variété de dimension $r(n-r)$.

Remarque : pour $r = 1$ on vient de réaliser l'espace projectif comme sous variété de $S_n(\mathbb{R})$.