209

Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples et applications.

I_ Approximation par des polynômes algébriques

1) Formules de Taylor

Théorème 1 (Taylor-Young) : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R}^d)$, et $a \in I$. Alors : $\forall x \in I$,

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right)$$

App 2 : $\sin(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t$; $1-\cos(t) \underset{t \to 0^+}{\sim} \frac{t^2}{2}$.

Théorème 3 (Taylor reste intégral) : Avec les mêmes hypothèses et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{R}^d)$, on a : $\forall x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k - \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

App 4 : $\forall x > 0$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$.

Corollaire 5 (inégalité de Taylor-Lagrange) : Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{R}^d)$, avec $\lambda(I) < +\infty$, on pose : $M_{n+1} = \sup_I \|f^{(n+1)}\|$, et on a :

$$\forall x \in I, \left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right\| \leq \frac{M_{n+1}|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

App 6 : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, la série $\sum_{n \geq 1} \left(\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right)$ converge absolument.

Théorème 7 (Taylor-Lagrange) : Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I,\mathbb{R})$, on a :

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + f^{(n+1)}(\xi), \text{ où } \xi \in]a;x[$$

si $x > a$ et $\xi \in]x;a[$ si $x < a$.

App 8 : Evaluation de l'erreur de consistance en analyse numérique.

2) Interpolation polynômiale

Prop/déf 9 : Soit $(a_j)_{1 \leq j \leq n}$ une famille de complexes 2 à 2 distincts. Il existe une unique famille $(L_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{C}_{n-1}[X]^n$ telle que : (i) $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $\deg(L_k) = n-1$

(ii) $\forall (k,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $L_k(a_j) = \delta_{k,j}$.

Cette famille est une base de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$, appelée base des polynômes interpolateurs de Lagrange associée à $(a_j)_{1 \leq j \leq n}$. De plus, on a : $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $L_k(X) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{X-a_j}{a_k-a_j}$

Corollaire 10 : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(a_j)_{1 \leq j \leq n} \in I^n$ 2 à 2 distincts. Si $f : I \to \mathbb{C}$, alors : $L(X) = \sum_{k=1}^{n} f(a_k) L_k(X)$ est l'unique élément de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que : $\forall k \in [\![1;n]\!]$, $f(a_k) = L(a_k)$

Prop 11 (phénomène de Runge) : Soit $\alpha > 0$, on définit :

$$f_\alpha : \begin{array}{rcl} [-1;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x^2+\alpha^2} \end{array}$$

Alors $\exists \alpha_0 > 0$ tel que si $\alpha < \alpha_0$, la suite de polynômes de Lagrange pour une subdivision uniforme de $[-1;1]$ ne converge pas simplement vers f_α (voir annexe).

Prop/déf 12 : Pour $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. C'est le n-ième polynôme de Tchebychev.

Prop 13 : On a : $\left| \begin{array}{l} T_0 = 1 ; T_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n. \end{array} \right.$

Prop 14 : Si $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme T_n est scindé à racines simples, et l'ensemble de ses racines est : $\left\{\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) / k \in [\![0;n-1]\!]\right\} \subset [-1;1]$.

App 15: Choisir les points précédents (points de Tchebychev) pour interpoler permet d'amoindrir le phénomène de Runge (annexe 2).

3) Densité de fonctions polynômiales

Théorème 16 (Bernstein): Soit $f \in \mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{C})$, on définit le n-ième polynôme de Bernstein associé à f par :

$$B_n(f)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}, \text{ pour } n\in\mathbb{N}^*.$$

Alors : $\|f-B_n(f)\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Corollaire 17 (Weierstrass): Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $a<b$. La famille $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale dans $(\mathcal{C}^0([a;b]),\|\cdot\|_\infty)$.

App 18: Soit $f\in\mathcal{C}^0([a;b])$ telle que $\forall n\in\mathbb{N}, \int_a^b x^n f(x)\,dx=0$. Alors $f=0$.

Théorème 19 (Müntz): Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ strictement croissante.

(i) $(x^{\alpha_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est totale dans $(\mathcal{C}^0([a;b]),\|\cdot\|_\infty) \iff \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\alpha_n}=+\infty$.

(ii) $(x^{\alpha_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est totale dans $L^2([a;b]) \iff \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\alpha_n}=+\infty$.

Théorème 20: Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\rho: I\to\mathbb{R}_+^*$ mesurable telle que : $\exists a>0, \int_I e^{a|x|}\rho(x)\,dx<+\infty$. Alors la famille de polynômes orthogonaux associée à ρ est une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

Ex 21: (1) Si $I=\mathbb{R}_+$ et $\rho:x\mapsto e^{-x}$ => polynômes de Laguerre

(2) Si $I=]-1;1[$ et $\rho: x\mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ => polynômes de Tchebychev. (cf : déf 12).

II – Convolution et fonctions très régulières

1) Convolution et support

Déf 22: Soient $f,g:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$. On dit que f et g sont convolables si $[y\mapsto f(x-y)g(y)]\in L^1(\mathbb{R}^d)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^d$. Dans ce cas, $f*g: x\mapsto\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy$ est appelé produit de convolution de f et g.

Prop 23: Si $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g\in L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $p\in[1;+\infty]$, alors f et g sont convolables et $\|f*g\|_p\le\|f\|_1\times\|g\|_p$.

Déf 24: Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $f:\Omega\to\mathbb{C}$. On considère la famille $(\omega_i)_{i\in I}$ des ouverts tels que $f_{|\omega_i}\equiv 0$ presque partout. Alors $\mathrm{supp}(f) := \Omega\setminus\left(\bigcup_{i\in I}\omega_i\right)$ (support de f).

Prop 25: Si f et g sont convolables, alors $\mathrm{supp}(f*g)\subset\overline{\mathrm{supp}(f)+\mathrm{supp}(g)}$.

Not 26: On note, pour Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$: $\mathcal{C}_c^k(\Omega)=\{f\in\mathcal{C}^k(\Omega) \,/\, \mathrm{supp}(f) \text{ est compact}\}$ et $\mathcal{D}(\Omega)=\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.

Ex 27: (1) $\mathbb{1}_{[a;b]}$ est à support compact.

(2) Soit $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto \begin{cases} x+1 \text{ si } x\in[-1;0],\ 1-x \text{ si } x\in[0;1] \\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$ $\in\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$.

Lemme 28: (1) Si $f\in L^1\cap\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$ et $g\in L^p(\mathbb{R}^d)$ où $p\in[1;+\infty]$, alors $f*g\in\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$.

(ii) Si $f\in\mathcal{C}_c^k(\mathbb{R}^d)$ et $g\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, f et g sont convolables et $f*g\in\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$. Et si $\alpha\in\mathbb{N}^d$ est tel que $|\alpha|\le k$, alors : $\partial^\alpha(f*g)=\partial^\alpha f*g$.

Rq 29: Si f et g sont à support compact, alors $f*g$ l'est également. Mais si seulement l'une des deux est à support compact, ce n'est généralement pas vrai.

Ex 30: $f:x\mapsto\frac{1}{1+x^2}$ et $g=\mathbb{1}_{[0;1]}$. Alors $f*g: x\mapsto \mathrm{Atan}(x)-\mathrm{Atan}(x-1)$.

2) Résultats de densité

Prop 31: La fonction $\varphi : x \in \mathbb{R}^d \mapsto e^{\frac{-1}{1-\|x\|_2^2}}$ est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathrm{supp}(\varphi) = \bar{B}(0;1)$.

Théorème 32: Il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ telle que: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\begin{array}{l} \mathrm{supp}(\varphi_n) \subset \bar{B}(0;\frac{1}{n}) \\ \varphi_n \geq 0 \text{ et } \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n(x)\,dx = 1. \end{array}\right.$

DEV 1 **Théorème 33:** $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, si $p \in [1;+\infty[$.

Corollaire 34: Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.

App 35 (lemme de Riemann-Lebesgue): Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in L^1(I)$, alors: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \int_I f(t)e^{-ixt}\,dt = 0$.

App 36 (inégalité de Hardy): Soient $f \in L^p(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$, où $p \in]1;+\infty[$ et $F : x \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$. Alors $F \in L^p(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ et $\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p$.

III - Approximation par des polynômes trigonométriques

Déf 37: Soit $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ (L^1 et 2π-périodique). Les coefficients de Fourier de f sont: $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt$.

Ex 38: ① Si $f = \sin$, on a: $\left|\begin{array}{l} c_1(f) = \frac{1}{2i} ;\ c_{-1}(f) = -\frac{1}{2i} \\ \forall n \notin \{-1;1\},\ c_n(f) = 0. \end{array}\right.$

② Soit f la fonction 2π-périodique telle que $\forall x \in [-\pi;\pi]$, $f(x) = x^2$. Alors $c_0(f) = \frac{\pi^2}{3}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}^*$, $c_n(f) = \frac{2(-1)^n}{n^2}$.

Déf 39: (i) Noyau de Dirichlet d'ordre $n \in \mathbb{N}$: $D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$.

(ii) Noyau de Fejér d'ordre $N \in \mathbb{N}^*$: $K_N(t) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n(t)$.

Rq 40: Si $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $D_n * f(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}c_k(f)$

Prop 41: $\forall t \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $D_n(t) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(t/2)}$ et $K_N(t) = \frac{\sin^2(\frac{Nt}{2})}{N\sin^2(t/2)}$

Prop 42: (i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt = 1$.

(ii) $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)\,dt = 1$.

Théorème 43 (Fejér): Si $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, alors $\lim\limits_{N\to+\infty} \|K_N * f - f\|_\infty = 0$.

Corollaire 44: Si $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et sa série de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{int}$ converge simplement. Alors: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{int} = f(t)$, pour $t \in \mathbb{R}$.

Théorème 45 (Fejér-Lebesgue): Si $f \in L^p_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, où $p \in [1;+\infty[$, alors: $\|K_N * f - f\|_p \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$.

App 46: $(e^{int})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ muni du produit scalaire: $\langle f,g \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}\,g(t)\,dt$.

Théorème 47 (Dirichlet): (i) Soient $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $x \in [-\pi;\pi]$ tels que f admet des limites à gauche et à droite en x, notées $f(x^-)$ et $f(x^+)$. Si les taux d'accroissement $[t \mapsto \frac{1}{t}(f(x+t) - f(x^+))]$ et $[t \mapsto \frac{1}{t}(f(x-t) - f(x^-))]$ sont bornés au voisinage de 0, alors: $\lim\limits_{n\to+\infty} D_n * f(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ DEV 2

(ii) Si $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi} \cap \mathcal{C}^1_{pm}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \|D_n * f - f\|_\infty = 0$.

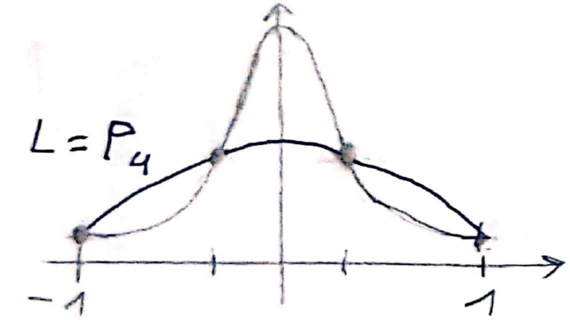
App 48: Calcul des $\zeta(2p)$ et $\eta(2p)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$ petit (avec $f : x \mapsto x^{2p}$)

Rq 49 (phénomène de Gibbs): Si f présente des discontinuités, on perd la convergence uniforme (ex: créneaux en annexe 3).

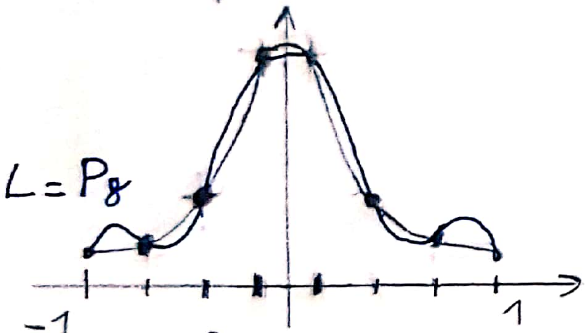
Annexe :

① Phénomène de Runge

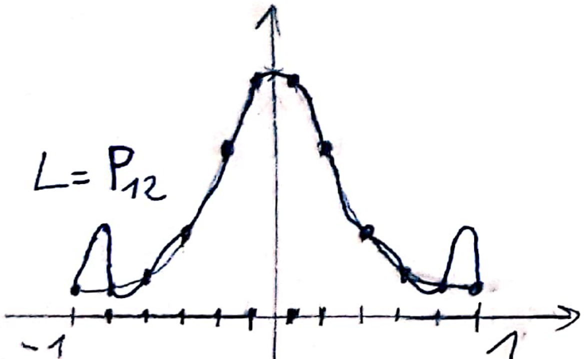
$\alpha^2 = 0.1.$



4 points



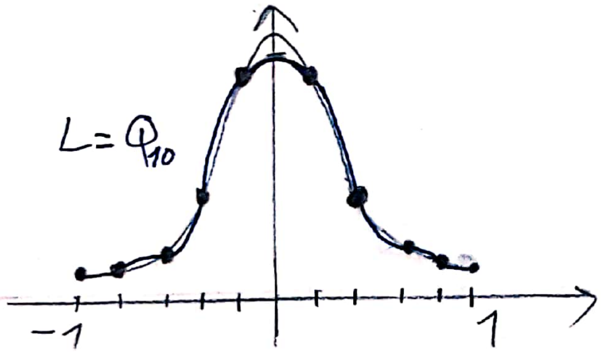
8 points



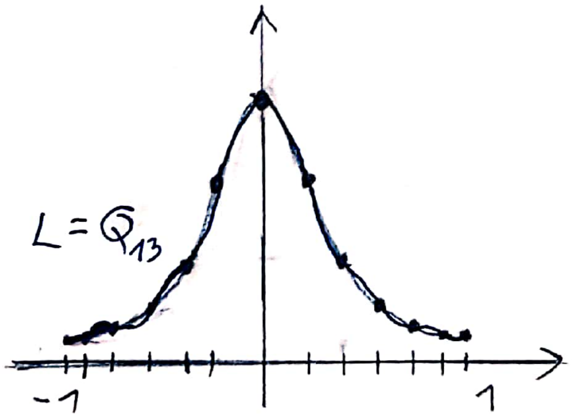
12 points

② Interpolation avec les pts de Tchebychev

$\alpha^2 = 0.1.$



10 points



13 points

③ Phénomène de Gibbs.

Approximation d'une fonction créneau par les sommes partielles S_N de sa série de Fourier.