203

Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.

I Approximation par des polynômes

1- Densité dans l'espace des fonctions continues

Théorème 1 (Stone-Weierstrass) : Soit (X,d) un compact* espace métrique. Toute sous-algèbre H de $C(X,\mathbb{C})$ séparante, auto-conjuguée et qui contient les fonctions constantes est dense dans $C(X,\mathbb{C})$. [HL] p.30.

Ex 2 : Si X est un compact de $\mathbb{R}^d$, l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{C}$ et à d variables de X dans $\mathbb{C}$ est dense dans $C(X,\mathbb{C})$. [HL] p.30

Thm 3 (Bernstein) : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ continue, ω son module de continuité. Pour $n \geq 1$, on considère le polynôme $B_n(f,x) = B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Alors il existe une constante C telle que pour tout $n \geq 1$, $\|f - B_n\|_\infty \leq C\,\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. De plus, cette estimation est optimale. [ZQ] p.518 DEV 1

Cor 4 (Weierstrass) : Soient $a<b$ deux réels. Alors $\mathbb{C}[X]$ est dense dans $C([a,b],\mathbb{C})$.

Prop 5 : Soit (P_n) une suite de polynômes convergeant uniformément sur un intervalle non borné I vers une fonction f. Alors f est une fonction polynomiale. [Pom] p.176

~~**Prop 6** : Soit I un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Alors $\mathbb{Z}[X]$ est dense dans $C(I,\mathbb{R})$ si et seulement si I ne contient pas d'entier.~~ [HL] p.34

Application 7 : Pour $a<b$ deux réels, $C[a,b]$ est séparable.

Application 8 : Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On note f sa somme. Si $\ell = \lim_{x \to 1} f(x)$ existe et est finie et si $a_n = O(1/n)$, alors $\sum a_n$ converge et sa somme vaut ℓ. C'est le thm taubérien de Hardy et Littlewood. [CL] p.106.

Application 9 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ continue telle que $\int_0^{+\infty} |f(t)|\,dt < \infty$. Soit Lf sa transformée de Laplace. Si, pour tout $s \geq 0$, $Lf(s) = 0$, alors f est nulle. [Pom] p.175.

2- Approximation locale des fonctions réelles

Thm 10 (Inégalité de Taylor-Lagrange) : Si f est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ définie sur un intervalle compact $[a,b]$ non réduit à un point, de classe C^n sur cet intervalle et $(n+1)$ fois dérivable sur $]a,b[$ avec $f^{(n+1)}$ majorée sur $]a,b[$ par une constante M, alors [Rom] p.182

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right\| \leq \frac{M}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}.$$

Application 11 (Kolmogorov) : Soit $f \in C^n(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on pose $M_k = \|f^{(k)}\|_\infty$. On suppose que M_0 et M_n sont finis. Alors pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, M_k est fini et $M_k \leq 2^{k(n-k)/2} M_0^{1-k/n} M_n^{k/n}$. [FGN An1] p.255

Ex 12 : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|\sin x - x + \frac{x^3}{3!}\right| \leq \frac{1}{5!}|x|^5$.

Thm 13 (Taylor-Young) : Soient f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle I et $a \in \mathring{I}$. Si f est dérivable à l'ordre $n \geq 1$ en a, elle admet alors, au voisinage de a, le développement limité d'ordre n : [Rom] p.186

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Ex 14 : Au voisinage de 0, [Rom] p.209

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}).$$

3- Polynômes orthogonaux

Déf 15 : Une fonction poids est une fonction w continue >0 sur un intervalle $X =]a,b[$ de $\mathbb{R}$ telle que pour tout entier $n \geq 0$, $\int_X |x|^n w(x)\,dx < \infty$. [Far] p.163

Thm 16 : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et w une fonction poids. On suppose qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|} w(x)\,dx < \infty$. Alors les polynômes orthogonaux associés à w forment une base hilbertienne de $L^2_w(I,\mathbb{C})$. DEV 2 [OA] p.140

Rq 17 : Le théorème précédent résulte du thm de Weierstrass si I est borné. [Far] p.164

Ex 18 :

- Pour $I =]0,+\infty[$ et $\omega : x \mapsto e^{-x}$, les polynômes orthogonaux sont les polynômes de Laguerre donnés par $P_n : x \mapsto e^{x}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$. [Fa] p.167 et p.168
- Pour $I = \mathbb{R}$ et $\omega : x \mapsto e^{-x^2}$, les polynômes orthogonaux sont les polynômes de Hermite donnés par $H_n : x \mapsto (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$.

Rq 19 : Grâce aux polynômes de Hermite, on obtient une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$. [On] p.112

Rq 20 : Les zéros des polynômes orthogonaux interviennent dans la méthode de Gauss pour le calcul d'intégrales. [Dem] p.73

II Interpolation par des polynômes

1- Interpolation de Lagrange

Thm 21 : Soient $a<b$ deux réels, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $x_0, \dots, x_n$ des points deux à deux distincts de $[a,b]$. Il existe un unique polynôme P_n de degré $\leq n$ tel que $P_n(x_i) = f(x_i)$ pour tout $i \in [\![0,n]\!]$. De plus, P_n est donné par [Dem] p.21
$$P_n(X) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,\ell_i(X)$$
où pour tout $i \in [\![0,n]\!]$,
$$\ell_i(X) = \prod_{j\neq i} \frac{(X-x_j)}{(x_i-x_j)}.$$

Thm 22 : Soit $\Pi_{n+1}(X) = \prod_{j=0}^{n}(X-x_j)$. On suppose que f est $(n+1)$ fois dérivable sur $[a,b]$. Alors pour tout $x \in [a,b]$, il existe $\xi_x \in]x \wedge x_i, x \vee x_i[$ tel que [Dem] p.23
$$f(x) - P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\Pi_{n+1}(x)\, f^{(n+1)}(\xi_x).$$

Cor 23 : $\|f - P_n\| \leq \frac{1}{(n+1)!}\|\Pi_{n+1}\|\,\|f^{(n+1)}\|$. [Dem] p.24

Def 24 : Pour tout entier naturel n, on définit le n-ième polynôme de Tchebychev par $t_n : x \in [-1,1] \mapsto \cos(n \arccos x)$. [Dem] p.25

Def 25 : Les points d'interpolation de Tchebytchev d'ordre n sont les points $x_i = \cos\frac{2i+1}{2n+2}\pi$, $0 \leq i \leq n$, racines du polynôme t_{n+1}. [Dem] p.25

Rq 26 : On se ramène à un intervalle $[a,b]$ quelconque au lieu de $[-1,1]$ avec une bijection linéaire et on définit les points d'interpolation de Tchebychev d'ordre n de $[a,b]$ par $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{2i+1}{2n+2}\pi$, $0 \leq i \leq n$. [Dem] p.25 et p.30

Prop 27 : Soient $a<b$ deux réels, $x_0, \dots, x_n$ les points d'interpolation de Tchebychev d'ordre n de $[a,b]$ et $\Pi_{n+1}(X) = \prod_{j=0}^{n}(X-x_j)$. Alors $\|\Pi_{n+1}\| = 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}$. [Dem] p.30

2- Opérateur d'interpolation de Lagrange

Def 28 : Soient $a<b$ deux réels et $x_0, \dots, x_n$ deux à deux distincts. L'opérateur d'interpolation de Lagrange L_n est défini par [Dem] p.46
$$L_n : C[a,b] \to \mathbb{R}_n[X]$$
$$f \mapsto P_n$$

Thm 29 : La norme de L_n est donnée par [Dem] p.46
$$\Lambda_n = \sup_{x\in[a,b]}\left(\sum_{i=0}^{n}|\ell_i(x)|\right)$$

Def 30 : Λ_n est appelée constante de Lebesgue associée à $x_0, \dots, x_n$. [Dem] p.46

Thm-Def 31 : Soient $a<b$ deux réels et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $q_n \in \mathbb{R}_n[X]$ qui réalise le minimum de la distance $\|f - q_n\| = d(f, \mathbb{R}_n[X])$. q_n est appelé polynôme de meilleure approximation uniforme de f à l'ordre n. [Dem] p.40

Thm 32 : Pour tout $f \in C[a,b]$,
$$\|f - L_n(f)\| \leq (1+\Lambda_n)\, d(f, \mathbb{R}_n[X]).$$ [Dem] p.42

Thm 33 (Admis) : Soient $a<b$ deux réels et $x_0, \dots, x_n$ les points d'interpolation de Tchebychev d'ordre n de $[a,b]$. Alors $\Lambda_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2}{\pi}\ln(n)$. [Dem] p.48

3- Quelques applications

- Calcul d'intégrales : Méthode de Simpson.

Soient $a<b$ deux réels, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $x_0, \dots, x_n$ les points de subdivision régulière de $[a,b]$. Soit $h = \frac{b-a}{n}$. Aux points x_i, $\frac{x_i + x_{i+1}}{2}$, x_{i+1}, on interpole par interpolation de Lagrange la fonction f par un polynôme de degré 2. [Rom] p.372

Soient $I = \int_a^b f(t)\,dt$ et $\bar{I} = \frac{h}{6}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+(k+\frac{1}{2})h) + f(b)\right)$.

Si f est de classe C^4 sur $[a,b]$
$$|I - \bar{I}| \leq \|f^{(4)}\|_\infty \frac{(b-a)^5}{2880\, n^4}.$$

- Multiplication rapide de polynômes : L'algorithme de transformée de Fourier rapide fait intervenir l'interpolation de Lagrange et permet de multiplier deux polynômes de degré [Pey] p.118 et p.119

n en $O(n \lg n)$.

III Approximation par des polynômes trigonométriques

1- Séries de Fourier

[Fa] p.148 **Def 34** : Soient $T>0$ et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ T-périodique. Les coefficients de Fourier de f sont donnés par $a_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x) e^{-i\frac{2\pi}{T}nx}dx$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. La série de Fourier de f est la série $\sum a_n(f) e^{i\frac{2\pi}{T}nx}$. On note $S_N f$ la somme partielle définie par $S_N f = \sum_{n=-N}^{N} a_n(f) e^{i\frac{2\pi}{T}n\cdot}$.

[Fa] p.148 et p.150 **Thm 35** : Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose $e_n : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{i\frac{2\pi}{T}n\cdot}$. Alors (e_n) est une base hilbertienne de l'espace de Hilbert $L^2_T(\mathbb{R})$ des fonctions T-périodiques de $L^2_{loc}(\mathbb{R})$.

[Fa] p.150 **Thm 36** : Soit f une fonction de $L^2_T(\mathbb{R})$. La série de Fourier de f converge vers f en moyenne quadratique. De plus, $\|f\|^2_{L^2_T(\mathbb{R})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n(f)|^2$ (formule de Parseval).

[Fa] p.151 **Ex 37** : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

2- Convergence uniforme

[Fa] p.152 **Thm 38** : Si f est une fonction continue périodique de période T et si

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n(f)| < +\infty$$

Alors

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(f) e_n$$

et la convergence est uniforme.

[Fa] p.153 **Cor 39** : Si f est une fonction continue de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ et de période T, la série de Fourier de f converge vers f uniformément et absolument.

[Fa] p.153 **Ex 40** : $\forall x \in [-\pi,\pi]$, $|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\cos((2k+1)x)$.

[20] p.105 **Application 41** : Soit $L>0$. Notons $\Omega =]0,L[\times]0,+\infty[$.
Alors le problème
- $u \in C(\bar\Omega)$, $u \in C^2(\Omega)$ · $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ dans Ω
- $u(0,t) = u(L,t) = 0$, $t \geq 0$ · $u(x,0) = h(x)$, $x \in [0,L]$

avec $h \in C^1[0,L]$ telle que $h(0) = h(L) = 0$ admet une solution donnée par

$\forall (x,t) \in \bar\Omega$: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x \, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}$ DEV 3

où les b_n sont les coefficients de Fourier de $\tilde h$ la $2L$-périodisée de h, définie par $\tilde h(x) = h(x)$ si $x \in [0,L]$ et $\tilde h(x) = -h(-x)$ si $x \in [-L,0]$.

Rq 42 : Cette solution est en fait unique. [20] p.108

Thm 43 (Fejer) : Soit f une fonction de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ T-périodique avec $T>0$. Si f est continue, la série de Fourier de f converge au sens de Cesaro vers en tout point et la convergence est uniforme, ie la suite de fonction $(\Sigma_N f)$ définie par $\Sigma_N = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_n f$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f. [Fa] p.157

3- Convergence ponctuelle

Thm 44 (Dirichlet) : Soit f une fonction de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ T-périodique, $T>0$. On suppose que f admet en un réel x des limites à droite et à gauche $f(x^+)$ et $f(x^-)$ et qu'il existe K et $h_0>0$ tels que pour tout $0<h<h_0$: [Fa] p.155

$|f(x+h) - f(x^+)| \leq Kh \quad |f(x-h) - f(x^-)| \leq Kh$.

Alors $\lim_{N\to+\infty} S_N f(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$.

Rq 45 : Les hypothèses de ce théorème sont vérifiées pour tout point x si la fonction f est de classe C^1 par morceaux. [Fa] p.155

Ex 46 : $\forall x \in]-\pi,\pi[$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $e^{\alpha x} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{sh}(\alpha\pi)}{\alpha - in} e^{inx}$. [Fa] p.159

Def 47 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose [Fa] p.182

$$T_n : C_{2\pi}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto S_n f(0)$$

Prop 48 : Soit $n \in \mathbb{N}$. La norme de T_n est donnée par $\|T_n\| = L_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})x|}{\sin x/2}dx$. Les L_n sont appelées constantes de Lebesgue. [Fa] p.183

Prop 49 : $L_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4}{\pi^2}\ln n$. [Fa] p.183

Cor 50 : Il existe une fonction $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ telle que $\sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n f(0)| = +\infty$. [Fa] p.192

Rq 51 (Phénomène de Gibbs) : Au voisinage d'une discontinuité d'une fonction périodique f, l'amplitude d'oscillation des sommes partielles de la série de Fourier de f est supérieure à la discontinuité. [Fa] p.180

Références

(•) [CL] Chambert-Loir, Fermigier, Maillot - Analyse 1 - Deuxième édition - Masson.

[OA] Beck - Malick - Peyré - Objectif Agrégation - H&K.

[Dem] Demailly - Analyse numérique et équations différentielles - EDP Sciences.

[Far] Faraut - Calcul intégral - EDP Sciences.

[HL] Hirsch - Lacombe - Éléments d'analyse fonctionnelle - Dunod.

(•) [Pey] Peyré - L'algèbre discrète de la transformée de Fourier - Ellipses.

[Pom] Pommelet - Cours d'analyse - Ellipses.

(•) [Rom] Rombaldi - Éléments d'analyse réelle - EDP Science.

[ZQ] Zuily, Queffélec - Analyse pour l'agrégation - Quatrième édition - Dunod.

Dans R ?

Théorème de Weierstrass

Paul Alphonse - Alexandre Bailleul

Réf : [ZQ] C. Zuily, H. Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*, p.518-519 (et p.114-115)

Théorème 1 *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ continue. On lui associe ses polynômes de Bernstein définis pour tout $n \geq 1$ par*

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Alors pour tout $n \geq 1$,

$$\|f - B_n\|_\infty \leq \frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

où ω est le module de continuité uniforme de f[1]*. De plus, cette estimation est optimale.*

Démonstration. Commençons par fixer un $x \in [0,1]$. On considère une suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre x. Pour $n \geq 1$ on notera

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k.$$

Remarquons que l'on a, pour $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}(S_n) = nx,$$

$$\mathrm{Var}(S_n) = nx(1-x),$$

et

$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) = B_n(x).$$

1. Pour tout $h \in [0,1]$, $\omega(h) = \sup_{|x-y| \leq h} (|f(x) - f(y)|)$. Celui-ci tend vers 0 en 0 par uniforme continuité de f (théorème de Heine).

Soit $n \geq 1$. Par le constat précédent on peut écrire

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(x)| &= \left|\mathbb{E}\left(f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)\right| \\ &\leq \mathbb{E}\left(\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\right) \\ &\leq \mathbb{E}\left(\omega\left(\left|x - \frac{S_n}{n}\right|\right)\right). \end{aligned}$$

On aura besoin du lemme suivant :

Lemme 1 *Pour tous $\lambda, h \in [0,1]$, on a $\omega(\lambda h) \leq (\lambda+1)\omega(h)$.*

Démonstration. La fonction ω est croissante. En effet, si $h \leq h'$ alors

$$\{|f(x) - f(y), |x-y| \leq h\} \subset \{|f(x) - f(y), |x-y| \leq h'\}$$

d'où $\omega(h) \leq \omega(h')$.

Ensuite, celle-ci est sous-additive :

Soient t_1 et t_2 dans $[0,1]$ tels que $t_1 + t_2 \in [0,1]$. Soient u et v dans $[0,1]$ tels que $|u-v| \leq t_1 + t_2$ et $u \leq v$, et soit w dans $[0,1]$ tel que $|u-w| \leq t_1$ et $|v-w| \leq t_2$. (On peut prendre $w = u + t_1$ par exemple)

Alors on a

$$\begin{aligned} |f(u) - f(v)| &\leq |f(u) - f(w)| + |f(w) - f(v)| \\ &\leq \omega(t_1) + \omega(t_2) \end{aligned}$$

d'où $\omega(t_1 + t_2) \leq \omega(t_1) + \omega(t_2)$ en passant à la borne supérieure.
On en déduit par une récurrence immédiate que si $n \in \mathbb{N}$ et $h \in [0,1]$ sont tels que $nh \in [0,1]$ alors $\omega(nh) \leq n\omega(h)$.

Soit donc λ et h dans $[0,1]$. Comme $\lfloor \lambda \rfloor \leq \lambda \leq \lfloor \lambda \rfloor + 1$ on obtient

$$\begin{aligned} \omega(\lambda h) &\leq \omega((\lfloor \lambda \rfloor + 1)h) \\ &\leq (\lfloor \lambda \rfloor + 1)\omega(h) \\ &\leq (\lambda + 1)\omega(h). \end{aligned}$$

□

Par le lemme on a

$$\omega\left(\left|x - \frac{S_n}{n}\right|\right) \leq \left(\sqrt{n}\left|x - \frac{S_n}{n}\right| + 1\right)\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz ($||.||_1 \leq ||.||_2$ comme on a une mesure de probabilité), on obtient

$$\begin{aligned}
|f(x) - B_n(x)| &\leq \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\mathbb{E}\left(\sqrt{n}\left|x - \frac{S_n}{n}\right| + 1\right) \\
&= \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1 + \sqrt{n}\left\|x - \frac{S_n}{n}\right\|_1\right) \\
&\leq \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1 + \sqrt{n}\left\|x - \frac{S_n}{n}\right\|_2\right).
\end{aligned}$$

De plus, $\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = x$ donc $\left\|x - \frac{S_n}{n}\right\|_2$ n'est autre que la racine carrée de la variance de $\frac{S_n}{n}$, qui vaut $\frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(S_n) = \frac{1}{n^2}nx(1-x) = \frac{x(1-x)}{n}$.

On a donc

$$|f(x) - B_n(x)| \leq \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)(1 + \sqrt{x(1-x)}).$$

Or le polynôme $X(1-X)$ admet son maximum sur $[0,1]$ en $\frac{1}{2}$ (simple étude de fonction), ce maximum valant $\frac{1}{4}$. Finalement,

$$|f(x) - B_n(x)| \leq \frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

et la majoration étant uniforme, on a bien

$$||f - B_n||_\infty \leq \frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Pour montrer que cette estimation est optimale, on va exhiber une fonction f telle que pour tout $n \geq 1$,

$$||f - B_n||_\infty \geq C\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

où C est une constante strictement positive.

On considère la fonction $f : x \mapsto \left|x - \frac{1}{2}\right|$, continue sur $[0,1]$ et dont le module de continuité uniforme vérifie $\forall h \in [0,1], \omega(h) \geq h$ (seconde inégalité triangulaire).

En gardant les mêmes notations que précédemment, pour $x = \frac{1}{2}$ et $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
||f - B_n||_\infty &\geq \left| f\left(\frac{1}{2}\right) - B_n\left(\frac{1}{2}\right) \right| \\
&= \mathbb{E}\left(\left| \frac{1}{2} - f\left(\frac{S_n}{n}\right) \right| \right) \\
&= \frac{1}{2n} \mathbb{E}\left(|2S_n - n|\right) \\
&= \frac{1}{2n} ||\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n||_1,
\end{aligned}$$

où pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $\varepsilon_i = 2X_i - 1$ est une variable aléaoire de Rademacher. On va montrer que $||\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n||_1 \geq \sqrt{\frac{n}{\mathrm{e}}}$ [2], ce qui prouvera que

$$||f - B_n||_\infty \geq \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}} \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

et terminera la preuve.

Posons $f = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$ et $g = \prod_{j=1}^{n} \left(1 + i\frac{\varepsilon_j}{\sqrt{n}}\right)$. On a

$$|g| = \left| \prod_{j=1}^{n} \left(1 + i\frac{\varepsilon_j}{\sqrt{n}}\right) \right| = \prod_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{\varepsilon_j^2}{n}\right)^{1/2} \leq \prod_{j=1}^{n} \exp\left(\frac{1}{n}\right)^{1/2} = \sqrt{\mathrm{e}}$$

car pour tout $j \in \{1, ..., n\}$, $\varepsilon_j^2 = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + x \leq \exp(x)$.

De plus,

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}(fg)| &= \left| \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left(\varepsilon_j \prod_{j=1}^{n} \left(1 + i\frac{\varepsilon_j}{\sqrt{n}}\right) \right) \right| \\
&= \left| \sum_{j=1}^{n} \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \mathbb{E}\left(1 + i\frac{\varepsilon_k}{\sqrt{n}}\right) \times \mathbb{E}\left(\varepsilon_j + \frac{i}{\sqrt{n}}\right) \right) \right| \\
&= \sqrt{n}
\end{aligned}$$

car les ε_k sont centrées et indépendantes.
Finalement, on a $\sqrt{n} = |\mathbb{E}(fg)| \leq ||f||_1 ||g||_\infty \leq \sqrt{\mathrm{e}}||f||_1$, d'où le résultat. □

2. Cette inégalité est appelée inégalité de Khintchine.

Densité des polynômes orthogonaux

Leçons : 202, 204, 209, 213, 239, 240, 241, 245.

Références :

Vincent Beck - Jérôme Malick - Gabriel Peyré,
Objectif Agrégation - p.140,
H&K - Deuxième édition - 2005

Jacques Faraut,
Calcul intégral - p.164,
EDP Sciences - 2006.

Le développement

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids. On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que

$$\int_I e^{a|x|}\rho(x)\,dx < \infty.$$

Théorème.
Les polynômes orthogonaux associés à ρ forment une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

Démonstration.
Considérons la fonction

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x)\rho(x) & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}.$$

Etant donné que

$$\forall x \in I : |f(x)|\rho(x) \leq \frac{1}{2}\left(1 + |f(x)|^2\right)\rho(x),$$

la fonction φ est élément de $L^1(\mathbb{R})$. On peut donc lui associer sa transformée de Fourier $\widehat{\varphi}$ associée au poids ρ. Montrons que $\widehat{\varphi}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur

$$B_a = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}(z)| < a/2\}.$$

Pour cela on considère la fonction

$$g : \begin{array}{ccc} B_a \times I & \to & \mathbb{C} \\ (z,x) & \mapsto & e^{-izx}f(x)\rho(x) \end{array}.$$

Alors :

1. Pour tout $z \in B_a$, la fonction $x \mapsto g(z,x)$ est mesurable.
2. Pour presque tout $x \in I$, la fonction $z \mapsto g(z,x)$ est holomorphe sur B_a.
3. Pour tout $z \in B_a$,
$$|g(z,x)| \leq e^{a|x|/2}|f(x)|\rho(x),$$
la fonction dominatrice étant intégrable sur I par inégalité de Holder.

Les trois points précédents montrent que la fonction

$$F : \begin{array}{ccc} B_a & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \int_I g(z,x) \end{array}$$

est holomorphe sur B_a. De plus, elle coincide avec $\widehat{\varphi}$ sur $\mathbb{R}$.

Soit à présent $f \in L^2(I,\rho)$ orthogonale à tous les monômes. D'après le théorème d'holomorphie sous le signe intégral, il vient

$$\forall n \in \mathbb{N} : F^{(n)}(0) = (-i)^n \int_I x^n f(x)\rho(x)\,dx = 0$$

et comme F est holomorphe, elle est nulle sur un voisinage de 0. B_a est connexe donc d'après le principe des zéros isolés, F est identiquement nulle sur B_a. En particulier, $\widehat{\varphi}$ est nulle. Comme φ est intégrable, l'injectivité de la transformée de Fourier sur $L^1(I,\rho)$ montre que φ est nulle. ρ étant une fonction strictement positive, il s'ensuit que f est nulle presque partout sur I.

D'après la caractérisation des parties denses dans les espaces de Hilbert, il s'ensuit que l'ensemble des polynômes orthogonaux est dense dans $L^2(I,\rho)$. En effet, une fonction orthogonale à tous les polynôme orthogonaux est orthogonale à tous les monômes. □

Résultats à avoir en poche

Lorsque l'intervalle I est borné, la démonstration est plus facile grâce au théorème de Weierstrass.

Considérons $I =]0,\infty[$ et la fonction poids $\rho : x \mapsto x^{-\ln x}$. Montrons que dans ca cas, les polynômes orthogonaux ne forment pas une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$. Considérons pour cela la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(2\pi \ln x) \end{array}.$$

Soit n un entier naturel. Alors *via* deux changements de variable :

$$\begin{aligned}
\langle f, x^n \rangle &= \int_I x^n \sin(2\pi \ln x) x^{-\ln x}\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{(n+1)y} \sin(2\pi y) e^{-y^2}\,dy \\
&= e^{(n+1)^2/4} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\left(y - \frac{n+1}{2}\right)^2\right) \sin(2\pi y)\,dy \\
&= (-1)^{n+1} e^{(n+1)^2/4} \int_{\mathbb{R}} \sin(2\pi t) e^{-t^2}\,dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

ainsi, f est une fonction non nulle orthogonale à tous les monômes, ce qui fournit le résultat.

Equation de la chaleur

Leçons : 201, 209, 222, 228, 241, 246.

Référence :

Hervé Queffélec - Claude Zuily,
Analyse pour l'agrégation - p.105,
Dunod - 4ème édition - 2013.

Le développement

Dans ce développement, on se propose de résoudre l'équation de la chaleur à l'aide des séries de Fourier.

Soient L un réel non nul et $Q =]0, L[\times]0, \infty[$. Considérons le problème

$$(EC) : \begin{cases} u \in C(\overline{Q}) & u \in C^2(Q) \quad (1) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0 & (t,x) \in Q \quad (2) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t \in [0, \infty[\quad (3) \\ u(x,0) = h(x) & x \in [0, L] \quad (4) \end{cases}$$

où h est une fonction de classe C^1 sur $[0, L]$ vérifiant $h(0) = h(L) = 0$, admet une solution.

Théorème.
Le problème (EC) *admet une solution.*

Démonstration.
Soit h_1 la fonction définie sur $[-L, L]$ par

$$h_1(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } x \in [0, L] \\ -h(-x) & \text{si } x \in [-L, 0] \end{cases} .$$

Comme $h(0) = 0$, il s'ensuit que la fonction h_1 est de classe C^1 sur $[-L, L]$. Considérons à présent H la fonction $2L$-périodique sur $\mathbb{R}$ qui coincide avec h_1 sur $[-L, L]$. étant donné que $h(L) = 0$, H est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 par morceaux. Alors la série de Fourier de H converge uniformément et absolument sur $\mathbb{R}$ vers H. H est une fonction impaire donc

$$\forall x \in \mathbb{R} : H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

avec

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{-L}^{L} h(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\, dx$$

et la série $\sum b_n$ converge absolument. Ainsi, la fonction

$$u : \begin{array}{ccc} \overline{Q} & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right) \end{array}$$

est continue d'après le théorème de continuité sous le signe somme. Montrons qu'elle est de classe C^∞ sur Q. On pose pour cela pour tout entier naturel non nul n

$$u_n : \begin{array}{ccc} \overline{Q} & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right) \end{array} .$$

Alors :

1. Les fonctions u_n sont toutes de classe C^∞ sur Q.
2. Soit $[\varepsilon, \infty[\subset]0, \infty[$. Alors les dérivées partielles d'ordre k des u_n sont majorées sur $]0, L[\times[\varepsilon, \infty[$ par un terme de la forme
$$C_k|b_n|n^{2k}\exp\left(-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\varepsilon\right)$$
qui est le terme générale d'une série convergente étant donné que la suite de terme générale $n^{2k}\exp\left(-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\varepsilon\right)$ est bornée et la série $\sum b_n$ converge absolument.

D'après le théorème de dérivation pour les intégrales à paramètres, u est bien de classe C^∞ sur Q.

Pour terminer, il ne reste plus qu'à montrer que u est solution de notre problème. Dans le point précédent, on a montré que u satisfait (1). De manière immédiate, il vient que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall(t,x) \in Q : \frac{\partial u_n}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(t,x) = 0$$
et donc d'après le théorème de dérivation pour les intégrales à paramètres, u vérifie (2). Enfin, pour tous t réel strictement positif et x élément de $[0, L]$:
$$u(0,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(0)\exp\left(-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi)\exp\left(-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right) = u(L,t) = 0,$$
$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = h(x),$$
donc u satisfait les points (3) et (4), ce qui achève la démonstration. □

Lemme (Principe du maximum pour l'équation de la chaleur).
Soit $u \in C(\overline{Q}) \cap C^2(Q)$ telle que
$$\forall(x,t) \in Q : \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) - \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) \geq 0.$$
Soient $T > 0$ et $K = [0, L] \cap [0, T]$. Alors :
$$\sup_{(x,t)\in K} u(x,t) = \sup_{(x,t)\in K\cap\partial Q} u(x,t).$$

Démonstration.
Considérons l'opérateur différentiel
$$P = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t}.$$
Soient $\varepsilon > 0$ et $u_\varepsilon : (x,t) \mapsto u(x,t) + \varepsilon x^2$ qui vérifie $Pu_\varepsilon \geq 2\varepsilon$ sur Q. Soit $m_\varepsilon = (x_\varepsilon, t_\varepsilon)$ un point de K où u_ε atteint son maximum sur K. Supposons par l'absurde de m_ε n'appartienne pas à $K \cap \partial Q$. Alors :
$$\begin{cases} 0 < x_\varepsilon < L \quad \text{donc} \quad \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(m_\varepsilon) = 0 \quad \text{et} \quad \dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2}(m_\varepsilon) \leq 0, \\ 0 < t_\varepsilon \leq T \quad \text{donc} \quad \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(m_\varepsilon) = \lim\limits_{h\to 0\,:\,h<0}\left(\dfrac{u_\varepsilon(x_\varepsilon, t_\varepsilon - h) - u(x_\varepsilon, t_\varepsilon)}{-h}\right) \geq 0. \end{cases}$$
Il en résulte que $Pu_\varepsilon(m_\varepsilon) \leq 0$ ce qui contredit $Pu_\varepsilon(m_\varepsilon) \geq 2\varepsilon$. Ainsi, $m_\varepsilon \in K \cap \partial Q$ puis :
$$\sup_{(x,t)\in K} u(x,t) \leq \sup_{(x,t)\in K} u_\varepsilon(x,t) = \sup_{(x,t)\in K\cap\partial Q} u_\varepsilon(x,t) \leq \sup_{(x,t)\in K\cap\partial Q} u(x,t) + \varepsilon L^2.$$
Il suffit alors de faire tendre ε vers 0 pour conclure. □

Théorème.
Le problème (EC) admet une unique solution.

Résultats à avoir en poche

Pour intuiter la solution du problème, on commence par chercher des solutions à variables séparées. Cette méthode se généralise à d'autres EDP comme l'équation des ondes ou l'équation de Laplace par exemple.