208

Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

Tous les espaces vectoriels considérés ici ont pour corps de base $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I - Espaces vectoriels normés

1 - Définitions

def 1: Une norme sur un espace vectoriel E est une application $\|.\| : E \to \mathbb{R}_+$ telle que :
- i) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$
- ii) $\forall x, y \in E \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- iii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

Le couple $(E, \|.\|)$ est appelé espace vectoriel normé (e.v.n).

ex 2:
- $E = \mathbb{K}^n$: $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ pour $1 \leq p < \infty$
- Si $\dim E = n$ et $B = (b_1, \dots, b_n)$ en est une base, $\left\|\sum\limits_{i=1}^n x_i b_i\right\|_\infty := \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$
- $E = C^0([0,1], \mathbb{K})$: $\|f\|_\infty = \sup\limits_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$, $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$, $1 \leq p < \infty$
- $E = \ell^p(\mathbb{N}, \mathbb{K})$: $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^\infty |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ si $p < \infty$; $\|x\|_\infty = \sup\limits_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$.

prop 3: Si $\|.\|$ est une norme sur E, alors elle est 1-lipschitzienne, donc continue.

Rq 4: $E \times E \to \mathbb{R}_+$, $(x,y) \mapsto \|x-y\|$ est une distance sur E.

prop 5: La boule $\overline{B}(x,r) := \{y \in E \mid \|x-y\| \leq r\}$ est convexe.

Illustration 6: (Voir annexe) Boules de $\mathbb{R}^2$ pour les normes usuelles

2 - Propriétés générales

def 7: Deux normes $\|.\|$ et $\|.\|'$ sur E sont dites équivalentes s'il existe $c_1, c_2 > 0$ tels que $\forall x \in E, \quad c_1 \|x\| \leq \|x\|' \leq c_2 \|x\|$.

Ex 8: $E = \mathbb{K}^n$; pour $q \leq p$, on a $\|.\|_\infty \leq \|.\|_p \leq \|.\|_q \leq n^{\frac{1}{q}} \|.\|_\infty$

Rq 9: Deux normes équivalentes définissent la même topologie sur E.

prop 10: Si $\dim E < \infty$, la boule $\overline{B}_{\|.\|_\infty}(0,1)$ est compacte.

Théorème 11: Si $\dim E < \infty$, toutes les normes sur E sont équivalentes.

c-ex 12: Si $E = C^0([0,1], \mathbb{K})$, $\|.\|_1 \leq \|.\|_\infty$ mais $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

cor 13: Soit $(E, \|.\|)$ un e.v.n. Si $\dim E < \infty$ alors il est complet.

Théorème 14. (Riesz) Si $\dim E = \infty$, alors $\overline{B}_{\|.\|}(0,1)$ n'est compacte pour aucune norme $\|.\|$ sur E

Ex 15: $E = \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ muni de $\|.\|_\infty$. $e_i = (\delta_{i,j})_{j \in \mathbb{N}}$. $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de $\overline{B}_{\|.\|_\infty}(0,1)$ mais n'admet pas de valeur d'adhérence.

3 - Quelques e.v.n. particuliers

a - Espaces préhilbertiens

def 16: Un espace préhilbertien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire (resp. hermitien) si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), noté $\langle , \rangle$.

ex 17: $M_n(\mathbb{K})$ muni de $\langle A, B \rangle = \sum\limits_{i,j} a_{i,j} \overline{b_{i,j}} = \operatorname{tr}(AB^*)$ (produit scalaire de Frobenius)

Lemme 18. (Cauchy-Schwarz) Si $(E, \langle , \rangle)$ est un préhilbertien, on a : $\forall x, y \in E \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| . \|y\|$.

prop 19. $E \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ définit une norme sur E.

ex 20: Sur $E = \mathbb{K}^n$, $C^0([0,1], \mathbb{K})$ et $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$; les normes $\|.\|_2$ proviennent d'un produit scalaire. Dans l'ordre :
$\langle x, y \rangle = \sum\limits_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$, $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f \overline{g} \, dx$, $\langle u, v \rangle = \sum\limits_{i=0}^\infty u_i \overline{v_i}$

prop 21 : Une norme $\|\cdot\|$ sur E est issue d'un produit scalaire ssi elle vérifie : $\forall x,y \in E,\ \|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2)$

C-ex 22 : Pour $E=K^n$, $\|\cdot\|_\infty$ ne découle pas d'un produit scalaire

b - Les espaces L^p, $1 \leq p \leq \infty$.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré.

def 23 : Si $0<p<\infty$, on définit $\mathcal{L}^p = \{ g : \Omega \to K \text{ mesurable} / \int_\Omega |g|^p d\mu < \infty \}$. Pour $f \in \mathcal{L}^p$, on définit $\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$.

def 24 : On définit $\mathcal{L}^\infty = \{ g : \Omega \to K \text{ mesurable} / \exists \lambda \geq 0,\ \mu(\{|f|>\lambda\}) = 0 \}$. Pour $f \in \mathcal{L}^\infty$, on définit le sup-essentiel $\|f\|_\infty = \inf\{\lambda \geq 0 \mid \mu(\{|f|>\lambda\}) = 0\}$.

prop 25 : (Hölder) Soient $p,q \in [1,+\infty]$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. Alors pour $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^q$, on a $fg \in \mathcal{L}^1$ et

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

prop 26 : (Minkowski) Pour $1 \leq p \leq \infty$, $\|\cdot\|_p$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p$: $\forall f,g \in \mathcal{L}^p, \forall \lambda \in K$ $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ et $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$

def-prop 27 : $L^p := \mathcal{L}^p/\sim$ où $f \sim g \iff f = g$ μ-presque partout, muni de $\|[f]\|_p := \|f\|_p$, est un e.v.n.

Rq 28 : La norme $\|\cdot\|_2$ est issue du produit scalaire

$$\langle f,g \rangle = \int_\Omega f \bar{g} \, d\mu.$$

prop 29 : Si μ est finie et $f \in \bigcap_{p\geq 1} L^p$, alors $\|f\|_p \xrightarrow[p\to\infty]{} \|f\|_\infty$

II - Applications linéaires continues

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n.

def 30 : On définit $\mathcal{L}(E,F) = L(E,F) \cap C^0(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E vers F. Si $F = K$ on note $\mathcal{L}(E,K) = E'$.

Application 31 : Définition de la différentielle d'une application $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

1 - propriétés.

prop 32 : Si $f \in L(E,F)$, on a équivalence entre :

- f est continue
- f est bornée sur $\bar{B}(0,1)$
- f est continue en 0
- f est lipschitzienne

prop 33 : Si $\dim E < \infty$, $\mathcal{L}(E,F) = L(E,F)$.

Rq 34 : En dimension infinie, la continuité de f dépend de $\|\cdot\|_E$ et de $\|\cdot\|_F$

Ex 35 : $C^0([0,1],K) \to K$, $f \mapsto f(0)$ est continue pour $\|\cdot\|_\infty$ mais pas pour $\|\cdot\|_1$

2 - Norme subordonnée

def 36 : Pour $f \in L(E,F)$ on définit $|||f||| = \sup\{\|f(x)\|_F ; \|x\|_E = 1\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$

prop 37 : $f \in \mathcal{L}(E,F) \iff |||f||| < \infty$ et $\mathcal{L}(E,F)$ est un e.v.n.

Rq 38 : $|||\cdot|||$ est atteinte si $\dim E < \infty$: $\exists x \in E, \|x\| = 1, \|f(x)\| = |||f|||$.

Ex 39 : Si $A \in M_n(K)$, $|||A|||_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|$, $|||A|||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$, $|||A|||_2 = \sqrt{\rho(AA^*)}$, où $\rho(M) = \max_{\lambda \in Sp(M)} |\lambda|$.

C-Ex 40 : $T : (C^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_0^{1/2} f - \int_{1/2}^1 f$; $|||T||| = 1$ pas atteinte.

Prop 41 : Pour $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, $|||g \circ f||| \leq |||g||| \cdot |||f|||$.

C-ex 42 : La norme de Frobenius (ex. 17) est sous-multiplicative mais n'est pas subordonnée.

Application 43 : Définition de l'exponentielle matricielle.

Application 44 : Étude de la suite définie par $X_0 \in K^n$, $X_{n+1} = A X_n$

III - Espaces de Banach / Hilbert.

1 - Définitions, exemples

def 45 : Un *espace de Banach* est un e.v.n. complet pour la topologie de la norme.

def 46 : Un *espace de Hilbert* est un préhilbertien complet pour la norme issue du produit scalaire.

ex 47 :
- $(C^0([0,1],K), \|\cdot\|_\infty)$ est un Banach.
- Si F est un Banach, alors $\mathcal{L}(E,F)$ aussi, en part., E' est un Banach

c-ex 48 :
- $(C^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet.
- $K[X]$ n'est complet pour aucune norme.

Théorème 49 : (Riesz-Fischer) [DEV] $L^p(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_p$, où $1 \le p \le \infty$.

2 - Théorèmes Banachiques

Prop 50 : Soit $(E,\|\cdot\|)$ un Banach. Soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Si $\sum_{n\ge 0}\|x_n\|$ converge, alors $\sum_{n\ge 0} x_n$ converge.

Application 51 : Exponentielle dans des Banach

Théorème 52 : Soit $(E,\|\cdot\|_E)$ un e.v.n, Soit $(F,\|\cdot\|_F)$ un Banach. Soit D un s.e.v. de E, dense dans E. Soit $f \in \mathcal{L}(D,F)$. Alors il existe un unique prolongement linéaire de f à E ; $g \in \mathcal{L}(E,F)$. De plus, $|||g||| = |||f|||$.

Application 53 : Définition de la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$

Théorème 54 : (Banach-Steinhaus) Soit $(E,\|\cdot\|_E)$ un Banach, Soit $(F,\|\cdot\|_F)$ un e.v.n. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathcal{L}(E,F)$. On suppose : $\forall x \in E$, $\sup_{i \in I}\|T_i x\|_F < \infty$. Alors $\sup_{i\in I} |||T_i||| < \infty$.

Cor 55 : $(E,\|\cdot\|_E)$ Banach, $(F,\|\cdot\|_F)$ e.v.n. Soit $(T_n)_n$ suite de $\mathcal{L}(E,F)$. On suppose : $\forall x \in E$, $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$ existe. Alors :
- $\sup_n |||T_n||| < \infty$
- $T \in \mathcal{L}(E,F)$
- $|||T||| \le \liminf_{n\to\infty} |||T_n|||$

Théorème 56 : (Application ouverte) Soient $(E,\|\cdot\|_E)$ et $(F,\|\cdot\|_F)$ deux Banach. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ surjective. Alors f est ouverte.

Théorème 57 : (d'isomorphisme de Banach) Soient $(E,\|\cdot\|_E)$ et $(F,\|\cdot\|_F)$ deux Banach. Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$ bijective. Alors T^{-1} est continue.

Théorème 58 : (Grothendieck) [DEV] Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ un espace mesuré de mesure finie. Soit F un s.e.v. de $L^p \cap L^\infty$ fermé dans L^p, où $1 \le p < \infty$. Alors F est de dimension finie.

3 - Théorèmes Hilbertiens

Théorème 59 : Soit $(H,\langle,\rangle)$ un Hilbert. Soit $C \subset H$ un convexe fermé de H. Pour $x \in H$, il existe un unique $P_C(x) \in C$ tel que $\|x - P_C(x)\| = d(x,C)$. $P_C : H \to C$ est 1-lipschitzienne, et $P_C(x)$ est caractérisé par : $\forall z \in C$, $\mathrm{Re}(\langle x - P_C(x), z - P_C(x)\rangle) \le 0$, où Re est la partie réelle.

Théorème 60 : (Riesz) Soit $(H,\langle,\rangle)$ un Hilbert. Soit $\varphi \in H'$. Alors il existe un unique $f_\varphi \in H$ tel que $\forall x \in H$, $\varphi(x) = \langle f_\varphi, x\rangle$. De plus $\|f_\varphi\|_H = |||\varphi|||$.

Rq 61 : H' est isométriquement isomorphe à H.

Rq 62 : (théorème admis) Si $1 < p < \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, les espaces $(L^p)'$ et $L^{p'}$ sont isométriquement isomorphes.

Exemple 63 : (espace de Bergman) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $B^2(\Omega) = \{ f \in H(\Omega) \mid \int_\Omega |f|^2 < \infty \}$. C'est un Hilbert, et pour $a \in \Omega$, $\delta_a : B^2(\Omega) \to \mathbb{C}$, $f \mapsto f(a)$ est continue.

Donc pour $a \in \Omega$, $\exists ! \, k_a \in B^2(\Omega)$, $f(a) = \langle f, k_a \rangle$
$$= \int_\Omega f \overline{k_a}$$

Théorème de Grothendieck

Ronan Memin - Thomas Franzinetti

October 23, 2017

Dans ce papier K désigne le corps des réels $\mathbb{R}$ ou des complexes $\mathbb{C}$.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(\Omega) < \infty$.

Théorème 0.1

Soit $F \subset L^\infty(\mu)$ un sous espace vectoriel fermé dans un $L^p(\mu)$ $(1 \leq p < \infty)$.

Alors $\dim F < \infty$.

La preuve se découpe en deux étapes :

1. Preuve de l'équivalence de quelques normes sur F et notamment l'existence d'une constante β telle que :
$$\forall f \in F, \quad \|f\|_\infty \leq \beta \|f\|_2$$
2. Majoration du cardinal de toute famille orthonormale.

Remarque 0.2

On fera l'identification via les inclusions suivantes :

$$F \subset L^\infty \subset L^2$$
$$F \subset L^\infty \subset L^p$$

Preuve. Puisque Ω est de mesure finie, on a :

$$\|f\|_p \leq \mu(\Omega)^{1/p} \|f\|_\infty$$

Donc l'injection suivante est continue :

$$i : L^\infty \longrightarrow L^p$$

On note i^* sa restriction :

$$i^* : (F, \|.\|_\infty) \longrightarrow (F, \|.\|_p)$$

Cette application est une bijection. Elle est clairement linéaire. De plus, par hypothèse F est fermé dans L^p (qui est complet) et donc $(F, \|.\|_p)$ est un Banach.

L'espace de départ lui est vu dans L^∞ c'est $i^{-1}(F)$: l'image réciproque par i de $F \subset L^p$ fermé. Donc $(F, ||.||_\infty)$ est fermé dans L^∞ (qui est complet) donc c'est un Banach.
Ainsi, d'après le théorème d'isomorphisme de Banach, i^* est bicontinue :

$$\exists \alpha > 0. \forall f \in F, \quad ||f||_\infty \leq \alpha ||f||_p \tag{1}$$

Montrons maintenant que l'injection $(F, ||.||_2) \subset L^p$ est continue. Ce qui terminera la première étape. Deux cas se présentent :

- Si $p \leq 2$: Soit $f \in F$. On pose $\tilde{p} = 2/p$ et on considère q son exposant conjugué : $\frac{1}{q} = 1 - \frac{p}{2}$. On a :

$$||f||_p^p \leq (\mu(\Omega))^{1/q} \left(\int_\Omega |f|^{p\frac{2}{p}} \right)^{\frac{p}{2}}$$

  D'où le résultat :

$$||f||_p \leq (\mu(\Omega))^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} ||f||_2$$

- Si $p > 2$: $|f|^p = |f|^2 |f|^{p-2}$. Donc, en utilisant 1 :

$$||f||_p^p \leq ||f||_\infty^{p-2} ||f||_2^2 \leq \alpha^{p-2} ||f||_p^{p-2} ||f||_2^2$$

  Ainsi $||f||_p \leq \alpha^{\frac{p-2}{2}} ||f||_2$

Par conséquent, les inclusions suivantes sont continues :

$$(F, ||.||_2) \subset (F, ||.||_p) \subset (F, ||.||_\infty)$$

Et donc :

$$\exists \beta > 0. \forall f \in F, \quad ||f||_\infty \leq \beta ||f||_2 \tag{2}$$

Soit $(f_1, ..., f_n)$ une famille orthonormée dans F. On considère l'application Φ suivante :

$$K^n \longrightarrow F$$
$$\Lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \longrightarrow \lambda_1 f_1 + ... + \lambda_n f_n$$

Soit Q une partie dénombrable dense de K^n.
L'inégalité 2 donne :

$$||\Phi(\Lambda)||_\infty \leq \beta ||\Phi(\Lambda)||_2 = \beta \sqrt{|\lambda_1|^2 + ... + |\lambda_n|^2}$$

Donc, pour tout $\Lambda \in Q$ on a un ensemble de mesure pleine Ω_Λ tel que (en travaillant avec des représentants des f_i) :

$$\forall x \in \Omega_\Lambda, \quad |\Phi(\Lambda)(x)| \leq \beta \sqrt{|\lambda_1|^2 + ... + |\lambda_n|^2}$$

Puisque Q est dénombrable, $\Omega_0 := \cap_{\Lambda \in Q} \Omega_\Lambda$ est toujours de mesure pleine et :

$$\forall x \in \Omega_0, \forall \Lambda \in Q, \quad |\Phi(\Lambda)(x)| \leq \beta \sqrt{|\lambda_1|^2 + ... + |\lambda_n|^2}$$

À x fixé, l'application suivante est continue :

$$(\lambda_1, ..., \lambda_n) \longmapsto \lambda_1 f_1(x) + ... + \lambda_n f_n(x)$$

on étend donc ce résultat à l'adhérence de Q, c'est-à-dire à K^n et donc, on peut particulariser pour :

$$\Lambda = (\overline{f_1(x)}, ..., \overline{f_n(x)})$$

Où $\overline{z}$ est la conjugaison complexe. On a donc :

$$\forall x \in \Omega_0, \quad |f_1(x)|^2 + ... + |f_n(x)|^2 \leq \beta \sqrt{|f_1(x)|^2 + ... + |f_n(x)|^2}$$

Donc,

$$\forall x \in \Omega_0, \quad |f_1(x)|^2 + ... + |f_n(x)|^2 \leq \beta^2$$

En intégrant, puisque Ω_0 est de mesure pleine et puisque les f_i forment une famille orthonormale :

$$n \leq \beta^2 \mu(\Omega).$$

Pour conclure au théorème annoncé, il suffit de considérer une famille libre quelconque $(g_1, ..., g_m)$, que l'on orthonormalise et l'on obtient une majoration de son cardinal :

$$m \leq \beta^2 \mu(\Omega).$$

Donc F est de dimension finie.

$\square$

Référence : Rudin, Analyse Fonctionnelle.

Théorème de Riesz-Fischer

Ronan Memin - Thomas Franzinetti

October 23, 2017

Dans ce papier K désigne le corps des réels $\mathbb{R}$ ou des complexes $\mathbb{C}$.

Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré.

Théorème 0.1

$\boxed{\textit{Pour tout } p \in [1, +\infty] \textit{ l'espace } L^p(\mu) \textit{ est un espace de Banach.}}$

Commençons par le cas $p = +\infty$.

Preuve. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^\infty(\mu)$. C'est-à-dire que l'on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N_k \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N_k, \|f_n - f_m\|_\infty \leq \frac{1}{k} \tag{1}$$

Par définition de $\|\cdot\|_\infty$, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, on a un ensemble négligeable $E_k \subset X$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N_k \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N_k, \forall x \in X \setminus E_k, |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{k} \tag{2}$$

On considère $E = \cup_{k\in\mathbb{N}^*} E_k$ qui est toujours un ensemble négligeable (en tant que réunion dénombrable de négligeables) et on a :

$$\forall x \in X \setminus E, \forall k \in \mathbb{N}^*, \exists N_k \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N_k, |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{k} \tag{3}$$

Ainsi, pour $x \in X \setminus E$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans K (complet) donc convergente. On note $f(x)$ sa limite.

Montrons maintenant que cette fonction f définie presque partout est bien dans $L^\infty(\mu)$ et que (f_n) converge vers f dans $L^\infty(\mu)$.

1. $f \in L^\infty$: En effet dans l'équation 2, pour $m \to +\infty$ et $k = 1$, on obtient :

$$\forall x \in X \setminus E, |f_{N_1}(x) - f(x)| \leq 1$$

Ce qui donne $f \in L^\infty(\mu)$ et $\|f\|_\infty \leq 1 + \|f_{N_1}\|_\infty$.

2. $f_n \xrightarrow{L^\infty(\mu)} f$: En effet, puisque $f \in L^\infty(\mu)$, on peut maintenant laisser m tendre vers l'infini dans 3 ce qui donne :

$$\lim_{n \to +\infty} ||f_n - f||_\infty = 0$$

Ainsi, pour toute suite de Cauchy dans $L^\infty(\mu)$, on a exhibé une limite dans cet espace au sens de la topologie de $L^\infty(\mu)$. Il est donc complet. $\square$

Etablissons maintenant le résultat pour $p \in [1, +\infty[$:

Preuve. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^p(\mu)$. Montrons qu'elle a une sous-suite convergente dans $L^p(\mu)$. Puisque (f_n) est de Cauchy, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall n, m > N_\varepsilon, ||f_n - f_m||_p \leq \varepsilon$$

On peut donc définir $\varepsilon \mapsto N(\varepsilon)$ en choisissant $N(\varepsilon)$ comme étant le plus petit des entiers N_ε définis ci-dessus. On construit donc une suite d'entiers n_k par récurrence de la manière suivante :

1. On choisit $n_0 = N_1$

2. Pour $k \in \mathbb{N}$ on pose :

$$n_{k+1} = \max\left(n_k, N\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)\right) + 1$$

De sorte que la suite (n_k) soit strictement croissante et que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ ||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}||_p \leq \frac{1}{2^k}$$

On pose pour $n \in \mathbb{N}$:

$$g_n = \sum_{k=0}^{n} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$$

Quitte à prendre des représentants, $g_n(x)$ converge dans $\overline{\mathbb{R}^+}$. On note g la fonction limite. De plus, on a :

$$||g_n||_p \leq \sum_{k=0}^{n} ||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}||_p \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \leq 2$$

Donc,

$$||g||_p^p = \int_X \liminf_{n \to +\infty} |g_n(x)|^p d\mu \leq \liminf_{n \to +\infty} \int_X |g_n(x)|^p d\mu \leq 2^p$$

Donc $g \in L^p(\mu)$. En particulier, g est finie presque partout, disons sur X_0 de mesure pleine.

Pour $x \in X_0$:

$$\forall k \geq l \geq 1, |f_{n_k}(x) - f_{n_l}(x)| \leq |f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)| + \ldots + |f_{n_{l-1}}(x) - f_{n_l}(x)| = g_{k-1}(x) - g_{l-1}(x) \tag{3}$$

Donc $x \in X_0$, la suite $(f_{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans K donc converge vers $f(x)$. Encore une fois il reste à montrer que f est dans $L^p(\mu)$ et que c'est bien la limite cherchée.

1. $f \in L^p(\mu)$: En effet puisque g est positive, d'après 3, on a pour $x \in X_0$ et pour $k \geq l \geq 1$:
$$|f_{n_k}(x) - f_{n_l}(x)| \leq g_{k-1}(x)$$
Donc, pour $k \to \infty$ et $l = 1$, on obtient $f \in L^p(\mu)$ et $||f||_p \leq ||g||_p + ||f_{n_1}||_p$

2. On a bien convergence dans $L^p(\mu)$ car pour $x \in X_0$, d'après 3 pour $k \to \infty$ on a :
$$|f(x) - f_{n_l}(x)|^p \leq (g(x) - g_{l-1}(x))^p \xrightarrow[l\to\infty]{} 0$$
Et,
$$|f(x) - f_{n_l}(x)|^p \leq g(x)^p \in L^1(\mu)$$
Donc, d'après le théorème de convergence dominée :
$$||f - f_{n_k}||_p \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

Ainsi, on a exhibé une sous suite convergente pour toute suite de Cauchy. Donc les suites de Cauchy convergent. $\square$

Référence : Brezis et Rudin.