207 — Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

Déf 1 : Soient X et E deux espaces topologiques, $Y \subset X$. Soit $f : Y \to E$ une application. Un <u>prolongement</u> de f sur X est une application $g : X \to E$ telle que $g|_Y = f$.

I PROLONGEMENT ET CONTINUITÉ

1. Prolongement ponctuel

Déf 2 : Soient E, F des espaces métriques, $f : D \subset E \to F$ non définie en $a \in \bar{D} \setminus D$ et telle que $\lim_{x \to a} f(x) = l$. La fonction g définie sur $D \cup \{a\}$ par $g(x) = f(x)$ $\forall x \neq a$ sur D et $g(a) = l$ est continue en a et est appelée <u>prolongement par continuité de f en a</u>.

Ex 3 : $x \mapsto x \sin(\frac{1}{x})$ se prolonge par continuité en 0.

Ex 4 : $x \mapsto \exp(-\frac{1}{x^2})$ se prolonge par continuité en 0.

2. Prolongement par densité

Thm 5 : (Principe de prolongement des identités)
Soient f, g deux fonctions continues d'un espace topologique E dans un evn F. Si f et g coïncident sur une partie dense, alors elles sont égales.

Thm 6 : (Prolongement des applications uniformément continues définies sur une partie dense).
Soient E, F deux espaces métriques, F complet, A une partie dense de E et f une application uniformément continue de A dans F. Il existe une unique application $g : E \to F$ continue qui prolonge f. De plus, g est uniformément continue.

App 7 : Construction de l'intégrale de Riemann des fonctions réglées. ($f : [a,b] \to E$ réglée est limite uniforme d'une fonction en escalier).

App 8 : (Théorème de Plancherel). Soit $f \in L^1 \cap L^2$. Alors $\hat{f} \in L^2$ et $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$. De plus l'application $f \to \hat{f}$ est un isomorphisme de L^2 sur L^2.

3. Prolongement global

Thm 9 : (Tietze-Urysohn)
Soit X espace métrique, Y un fermé de X et $g : Y \to \mathbb{R}$ continue. Alors g admet un prolongement continu $f : X \to \mathbb{R}$.

App 10 : Si toute fonction continue de X dans $\mathbb{R}$ est bornée alors X est compact.

II THÉORÈME DE HAHN-BANACH ANALYTIQUE ET PROLONGEMENT DES FORMES LINÉAIRES

Lem 11 (Zorn, admis) : Tout ensemble ordonné, inductif, non vide, admet un élément maximal. [BRE] p.2

Déf 12 : (fonctionnelle sous-linéaire). Soit E $\mathbb{R}$-ev. Une application $p : E \to \mathbb{R}$ est une fonctionnelle sous linéaire si
(1) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ $\forall x \in E$, $\forall \lambda > 0$.
(2) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ $\forall x, y \in E$.

Thm 13 (Hahn-Banach, forme analytique). [BRE] p.1
Soit $G \subset E$ sev et $g : G \to \mathbb{R}$ une application linéaire telle que $g(x) \leq p(x)$ $\forall x \in G$ pour p défini précédemment. Alors il existe une forme linéaire définie sur E telle que :
(1) $g(x) = f(x)$ $\forall x \in G$
(2) $f(x) \leq p(x)$ $\forall x \in E$.

➜ Dans toute cette partie, E désigne un evn et E^* son dual topologique, il l'espace des formes linéaires et continues sur E, muni de la norme duale : $\|f\|_{E^*} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} |f(x)| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} f(x)$; G sev de E

Coro 14 : <u>(extension par continuité)</u> • Pour tout $g \in G^*$ il existe $f \in E^*$ qui prolonge g avec $\|f\|_{E^*} = \|g\|_{G^*}$
• si G est dense dans E, f est unique.

Coro 15 : pour tout $x_0 \in E$ tel que $x_0 \neq 0$ $\exists f \in E^*$ telle que $\|f\| = 1$ et $f(x_0) = \|x_0\|$. De même $\exists f_0 \in E^*$ telle que $\|f_0\| = \|x_0\|$ et $\langle f_0, x_0 \rangle = \|x_0\|^2$. En particulier, si $E \neq \{0\}$, $E^* \neq \{0\}$.

Rque 16 : Une telle forme n'est en général pas unique.

Ex 17 : • pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, f, g, h formes linéaires continues sur $\mathbb{R}^2$:
1) $f(x,y) = x$; $g(x,y) = y$ et $h(x,y) = \frac{x+y}{2}$ $\Rightarrow \|f\| = \|g\| = \|h\| = \|(1,1)\|_\infty = 1$
2) $f(x,y) = x$; $g(x,y) = x+y$ et $h(x,y) = x - y$ $\Rightarrow \|f\| = \|g\| = \|h\| = \|(1,0)\|_1 = 1$
$\Rightarrow f \neq g \neq h$.

Rqu 18 : On a l'unicité si E est un Banach strictement convexe, par exple E est de Hilbert ou $E = L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$.

Coro 19 : $x \neq y \Rightarrow \exists f \in E^*$ telle que $f(x) \neq f(y)$. Autrement dit : si $x, y \in E$; si pour tout $f \in E^*$ $f(x) = f(y)$, alors $x = y$ ou encore : • $x = 0$ ssi x est annulé par toute forme linéaire.

Coro 20 : E^* séparable $\Rightarrow$ E séparable (E^* sépare les points).

Coro 21 : Pour tout $x \in E$, $\|x\| = \sup_{\substack{f \in E^* \\ \|f\| \leq 1}} |f(x)| = \max_{\substack{f\in E^* \\ \|f\| \leq 1}} |f(x)|$

Ex 22 : (convergence faible)
Soit (x_n) suite de points de E telle que $\forall \varphi \in E^*$, $\varphi(x_n)$ cv.
Alors $\sup_{n \geq 1} \|x_n\| < \infty$

Coro 23 : (critère de densité pour un sev et critère d'appartenance à une adhérence).
1) $x \in \overline{G} \iff \forall g \in E^*,\ g|_G = 0 \Rightarrow g(x) = 0$
2) $\overline{G} = E \iff G^\perp = \{0\}$

Appli 24 : (se dérive de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$: soit $f_{a_n} : x \mapsto \frac{1}{x - a_n}$, avec $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \infty$
alors $\operatorname{vect} \langle f_{a_n} \rangle = \mathcal{C}([0;1];\mathbb{R})$.

III Prolongement et différentiabilité

1. Prolongement et régularité

Thm 25 : (Prolongement des fonctions dérivables). Soit f une fonction continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans l'evn E, et soit $a \in I$. Si f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si f' possède une limite l en a, alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$.
Sans l'hypothèse de continuité, le résultat est faux :

C-ex 26 : Sans l'hypothèse de continuité, le résultat est faux :
prendre $f : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Ex 27 : Soit $f : x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ f est de classe $\mathcal{C}^\infty$

Coro 28 : Une fonction dérivée ne possède que des discontinuités de deuxième espèce.

Ex 29 : Soit $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ défini sur $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$. f est dérivable sur $[0;1]$, mais sa dérivée n'est pas continue en 0.

App 30 : (Existence de fonctions plateaux). Soit $[a;b] \subset \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Il existe une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ vers $[0;1]$, constante égale à 1 sur $[a;b]$ et nulle en dehors de $]a-\varepsilon; b+\varepsilon[$.

Thm 31 : (Borel). Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Il existe une fonction $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\forall k \geq 0$ $u^{(k)}(a) = 0$.

Appli 32 : Toute fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a;b]$ avec dérivées de tous ordres à droite en a et à gauche en b peut être prolongée en une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Prolongement des solutions d'équations différentielles

Cadre : $U = J \times \Omega$, J ouvert de $\mathbb{R}$ et Ω ouvert de $\mathbb{R}^m$.
$f : U \to \mathbb{R}^m$ une application continue. On considère l'ED :
(E) : $y'(t) = f(t, y(t))$, $(t,y) \in U$.

Déf 33 : Soit (y, I), $I \subset J$ une solution de (E). On dit que :
- $(\tilde{y}, \tilde{I})$ est un prolongement de y si $\tilde{I} \supset I$ et $\tilde{y}|_I = y$.
- (y, I) est maximale si (y, I) n'admet pas de prolongement
- (y, I) est dite globale si $I = J$.

Thm 34 : Toute solution y se prolonge en une solution maximale $\tilde{y}$ (pas nécessairement unique : prendre (E) : $y' = 3|y|^{2/3}$; $y(0) = 0$).

Rque 35 : Toute solution globale est maximale, la réciproque est fausse.
Prendre par ex (E) : $y' = y^2$ sur $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Thm 36 d'existence (Cauchy-Peano-Arzela). Soit $C = [t_0 - T; t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0)$ avec $T \leq \min(T_0, \frac{r_0}{M})$ un cylindre de sécurité pour (E). Alors il existe une solution $y : [t_0 - T; t_0 + T] \to \overline{B}(y_0, r_0)$ avec condition initiale $y(t_0) = y_0$.

Thm 37 (critère de maximalité). Une solution $(y, I =]a;b[)$ est maximale si $\lim_{t\to a^+} |y(t)| = +\infty$ et si $\lim_{t\to b^-} |y(t)| = +\infty$.
sinon, y peut être prolongée au delà de b (resp) de a en une solution de (E)

Thm 38 : (Cauchy-Lipschitz). Si f est localement lipschitzienne en y, alors pour tout cylindre de sécurité défini dans Thm 36, (E) avec $y(t_0) = y_0$ admet une unique solution exacte $y : [t_0 - T; t_0 + T] \to U$.

Ex 39 : Si $f :]a;b[\times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ est continue et bornée, alors toute solution de (E) est globale. Prendre par exemple sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:
(E) : $y'(t) = \dfrac{y^2(t)}{1 + y^2(t)}$, avec $y_0 = y_0$.

IV Prolongement analytique en analyse complexe

1. Série entière et bord du disque de convergence

Cadre : $\sum a_n z^n$ série entière de rayon de convergence R égal à 1.
Pour $z \in D(0;1)$, on pose $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et on note $\Gamma = \partial D(0;1) = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$.
le cercle d'incertitude

Def 40 : $a \in \Gamma$ est dit régulier s'il existe un disque ouvert D_a centré en a tel que f admette un prolongement analytique dans $D \cup D_a$, singulier sinon.
On note A_r l'ensemble des points réguliers, A_s l'ensemble des points singuliers.

Ex 41 : Pour $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, $A_r = \Gamma \setminus \{1\}$ et $A_s = \{1\}$.

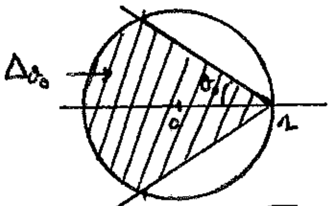
DVLPT 1

Thm 42: Il y a toujours au moins un point singulier sur Γ, ie $A_S \neq \emptyset$.

Rqe 43: Une série entière peut être prolongeable par continuité sur Γ, mais pas analytiquement. Prendre par ex $\sum \frac{z^n}{n^2}$.

Thm 44: (d'Abel angulaire). Soit $\sum a_n z^n$ une série entière avec $R \geq 1$ et telle que $\sum a_n$ CV. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ pour $z \in D(0;1)$. On fixe $\theta_0 \in [0; \pi/2[$ et on pose $\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C}, |z|<1 \text{ et } \exists \rho>0, \exists \theta \in [-\theta_0;\theta_0], z = 1-\rho e^{i\theta}\}$

alors $\lim\limits_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$



Thm 45: (Taubérien faible) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière avec $R \geq 1$ et telle que $\sum a_n$ CV. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ pour $z \in D(0;1)$. On suppose que : $\exists S \in \mathbb{C}, \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = S$. Alors, si $a_n = o(1/n)$, $\sum a_n$ CV et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$.

2 Fonctions holomorphes

Thm 46: (des zéros isolés). Si f est une fonction analytique dans un ouvert connexe U et si f n'est pas identiquement nulle, alors l'ensemble des zéros de f n'admet pas de point d'accumulation dans U.

Thm 47: (Principe de prolongement analytique). Si deux fonctions analytiques coïncident sur un sous-ensemble $D \subset U$ ayant un point d'accumulation dans U, alors elles sont égales sur U.

Lemme 48: (fonction caractéristique de la loi normale). G, définie sur $\mathbb{C}$ par $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{zx - x^2/2} dx$ et $z \mapsto e^{z^2/2}$ sont holomorphes et coïncident sur $\mathbb{R}$. En particulier si $t \in \mathbb{R}$ $\varphi_X(t) = G(it) = e^{-t^2/2}$, $X \sim \mathcal{N}(0;1)$.

Thm 49: (TCL). Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de va iid dans L^2. Si $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $m = \mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma^2 = Var(X_1) > 0$, alors

$$\frac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0;1)$$

App 50: Soit $I \subset \mathbb{R}$. On appelle fonction poids une fonction $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive et telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int_I |x|^n \rho(x) dx < +\infty$.

On note $L^2(I, \rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue. Muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle_\rho = \int_I f(x) \overline{g(x)} \rho(x) dx$, $L^2(I, \rho)$ est un espace de Hilbert. Il existe une unique famille $(P_n)_n$ de polynômes orthogonaux deux à deux tels que $\deg P_n = n$.

Maintenant, si $\exists \alpha > 0$, $\int_I e^{\alpha |x|} \rho(x) dx < +\infty$, alors les polynômes $(P_n)_n$ forment une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.

DVLPT 2

Ex 51: (fonction ζ de Riemann). Pour $Re(s) > 1$, la fonction $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ est holomorphe. Elle peut se prolonger en une fonction holomorphe sur $\{s \in \mathbb{C}, Re(s) > 0\} \setminus \{1\}$.

Ex 52: (fonction Γ d'Euler) Pour $x > 0$, $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. La fonction Γ peut se prolonger en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ sans zéros et admettant des pôles simples en les $-n, n \in \mathbb{N}$.

Ex 53: Il existe une unique fonction $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f(1/n) = \frac{1}{n}$. Par contre, si $f \in \mathcal{H}(U)$, $U = \{z \in \mathbb{C}, Re(z) > 0\}$ il en existe au moins deux telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f(1/n) = 0$.

Thm 54: (Principe de symétrie de Schwarz). Soit I intervalle de $\mathbb{R}$, Ω^+ domaine dans $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C}, Im(z) > 0\}$. Soit $a \in I$ tel que $\Pi^+ \cap D_a \subset \Omega^+$. Soit Ω^- l'image par symétrie de Ω^+ : $\Omega^- = \{z, \bar{z} \in \Omega^+\}$. Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega^+)$ avec $f = u + iv$. On suppose que pour toute suite $(z_n)_n \in \Omega^+$ qui converge vers un point de I on a $\lim\limits_{n \to +\infty} v(z_n) = 0$.
Alors $\exists F \in \mathcal{H}(\Omega^+ \cup I \cup \Omega^-)$ tq $F(z) = f(z)$ dans Ω^+ ; cette fonction satisfait la relation : $F(\bar{z}) = \overline{f(z)}$, $z \in \Omega^+ \cup I \cup \Omega^-$

Thm 55: Soit Ω ouvert simplement connexe du plan. Alors
- Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $1/f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $\exists g \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que $f = \exp(g)$.
- $\text{Log}|f|$ est alors harmonique sur Ω.

Thm 56: Soit f analytique définie sur l'ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}$. Si $|f|$ présente un maximum local dans Ω, f est constante.

Appli 57: (Thm de Schwarz). Soit $f \in \mathcal{H}(D(0;1))$. On suppose que $f(0) = 0$, $|f(z)| < 1$ $\forall z$ sur $D(0;1)$.
Alors :
i) pour tout $z \in D(0;1)$, $|f(z)| \leq z$.
ii) Si pour tout $z_0 \in D(0;1)$ $|f(z_0)| = |z_0|$, alors $\exists \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall z \in D(0;1)$ $f(z) = \lambda z$

Références :
- Zuily - Queffélec, Analyse pour l'agrégation
- Brezis, Analyse fonctionnelle
- Rudin, Analyse réelle et complexe
- Pommellet, Cours d'analyse
- Rouvière, petit guide de calcul différentiel
- Gourdon, Analyse
- Beck, Malick, Peyré, Objectif Agrégation