207 — Prolongement de fonctions : Exemples et applications

Déf 0 : Soient X et E deux espaces topologiques. $Y \subset X$.
Soit l'application $f : Y \to E$. Un prolongement de f sur X est une application $g : X \to E$ telle que $g_{|Y} = f$.

I. Prolongement et continuité.

1. Prolongement ponctuel. [GDY p16]

Déf 1 : Soient $f : D \subset (E,d) \to (F,d')$ et $a \in \overline{D} \setminus D$.
Si $\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = \ell$, alors $g : D \cup \{a\} \to F$ définie par $\begin{cases} g_{|D} = f \\ g(a) = \ell \end{cases}$
est continue en a et est appelée prolongement par continuité de f en a.

Exple 2 : $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ se prolonge par continuité en 0.

2. Prolongement par densité.

Th 3 (principe de prolongement des identités) [POM p40]
Soient f et g deux fonctions continues de l'espace topologique E dans l'evn F.
Si f et g coïncident sur une partie dense, alors elles sont égales.

DVT

Th 4 (prolongement des applications uniformément continues sur une partie dense). [GX2 p117]
Soient E et F deux espaces métriques, F étant complet.
Soient X une partie de E, dense dans E et $f : X \to F$ une application uniformément continue.
Alors il existe une unique application $g : E \to F$ continue tq $g_{|X} = f$.
De plus, g est uniformément continue.

Applications 5 : [POM p49]
a) Construction de l'intégrale de Riemann des fonctions réglées.
b) Unicité, à isométrie près, du complété d'un espace métrique. [GDY exo6 p25]

3. Prolongement global.

Th 6 : (prolongement de Tietze-Urysohn) [GDY pb12 p66]
Soient (E,d) un espace métrique ; A un fermé de E et $f : A \to \mathbb{R}$ une application continue et bornée.
Il existe alors un prolongement continu g de f sur E tel que
$\sup_{x \in E} g(x) = \sup_{y \in A} f(y)$ et $\inf_{x \in E} g(x) = \inf_{y \in A} f(y)$.

Application 7 : Soit (X,d) un espace métrique. [QZ exo4 p221]
Si toute fonction continue de X dans $\mathbb{R}$ est bornée, alors X est compact.

Application 8 : (Séparation des fermés par des fonctions continues) [TIS p118]
Soient A et B deux parties fermées et disjointes d'un espace métrique E.
alors il existe une fonction continue g de E sur $[0,1]$ nulle sur A et égale à 1 sur B.

4. Prolongement des formes linéaires

Th 9. (Hahn-Banach, forme analytique) [BRE p1]
E ev sur $\mathbb{R}$. Soit $p : E \to \mathbb{R}$ une application vérifiant :
$$\begin{cases} p(\lambda x) = \lambda p(x) & \forall x \in E \quad \forall \lambda > 0 \\ p(x+y) \leq p(x) + p(y) & \forall x,y \in E \end{cases}$$
Soit $G \subset E$ sev et $g : G \to \mathbb{R}$ forme linéaire tq $g(x) \leq p(x)\ \forall x \in G$
alors il existe une forme linéaire f sur E qui prolonge g ie
$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \forall x \in G \\ f(x) \leq p(x) & \forall x \in E \end{cases}$$

Corollaire 10 : [BRE p3]
Soit G un sev de E et soit $g : G \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue de norme $\|g\|_{G'} = \sup_{\substack{x \in G \\ \|x\| \leq 1}} g(x)$.
alors il existe $f \in E'$ qui prolonge g et telle que $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}$.

Application 11 : Soit F un sev de l'evn E. [POM p 67]

F est dense ssi toute forme linéaire qui s'annule sur F est nulle sur E.

II. Prolongement et dérivabilité réelle.

1. Prolongement et régularité.

Prop 12. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$. Si f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et s'il existe $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x) = l$ alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$.
La fonction dérivée ainsi obtenue sur I est alors continue en a.
[Pom p 90]

Ctre-exple 13. Si f non continue, prendre :

$$f : \begin{array}{l} x \longmapsto x \quad \text{pour } x \leq 0 \\ x \longmapsto x+1 \quad \text{pour } x > 0 \end{array} \quad \text{en } 0.$$ [Pom p 90]

Exple 14 : $f(x) = e^{-1/x^2}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ non nulle pour $x \neq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$ [POM p 91]

Application 15 : Existence des fonctions plateaux [Pom p 91] [ROU exo 111 p 328]

Th 16 (de Borel) [ROU exo 112 p 333]

Soit $(a_k)_{k \geq 0}$ une suite quelconque de réels.
Il existe une fonction $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $u^{(k)}(0) = a_k$, $k \in \mathbb{N}$.

Application 17 [ROU exo 112 p 333]

Toute fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a,b]$ compact peut être prolongée en une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Prolongement et équations différentielles.

I intervalle de $\mathbb{R}$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$
$f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ continue

On considère : (E) $\quad \dfrac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t))$ où $x \in C^1(I, \Omega)$

Déf 18 : • Une solution de (E) est un couple (x, J) où $J \subset I$ et $x \in \mathcal{C}^1(J, \Omega)$ vérifiant (E) en tout point de $\overset{\circ}{J}$.

• Etant donné $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, le problème de Cauchy consiste à trouver une solution (x, J) de (E) telle que $t_0 \in J$ et $x(t_0) = x_0$.

• Soit (x, J) solution de (E). Si $I = J$, on dit que la solution est globale.

• Soient (x_1, J_1) et (x_2, J_2) deux solutions de (E). On dit que (x_2, J_2) prolonge (x_1, J_1) si $J_1 \subset J_2$ et $x_2|_{J_1} = x_1$

• Une solution (x, J) est dite maximale si elle n'admet aucun prolongement. [QZ p 353]

Th 19 : Supposons f définie sur $]a,b[\times \mathbb{R}^n$.

Soit (x, J) une solution maximale de (E) où $J =]T_-, T^+[$

alors $\begin{cases} \text{ou bien} \quad T^+ = b \\ \text{ou bien} \quad T^+ < b \quad \text{et} \quad \lim\limits_{t \to T^+} |x(t)| = +\infty \end{cases}$

[QZ p 371]

de même $\begin{cases} \text{ou bien} \quad T_- = a \\ \text{ou bien} \quad T_- > a \quad \text{et} \quad \lim\limits_{t \to T_-} |x(t)| = +\infty. \end{cases}$

Corollaire 20 : (Critère de prolongement)

Soit (x, J) solution de (E) avec $J =]\alpha ; \beta[$, $a < \alpha < \beta < b$.

Si x est bornée au voisinage de β (resp^t α), alors x peut être prolongée au-delà de β (resp^t α) en une solution de (E).
[QZ p 371]

Exple 21 : Si $f :]a,b[\times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est continue et bornée, alors toute solution de (E) est globale.

Par exple, (sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) $\begin{cases} x'(t) = \dfrac{x^2(t)}{1 + x^2(t)} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ admet $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ une solution unique définie sur $\mathbb{R}$ [QZ p 373]

III. Prolongement analytique

1. Fonction holomorphe

Th 22. Soit Ω un ouvert connexe.
Si $f \in H(\Omega)$ s'annule ainsi que toutes ses dérivées en un même point $z_0 \in \Omega$, alors f est identiquement nulle.
[AN-NA p88]

Corollaire 23 (principe du prolongement analytique)
Soit Ω un ouvert connexe.
Si f et g sont deux fonctions holomorphes dans Ω qui coïncident sur un ouvert non vide $V \subset \Omega$, alors $f \equiv g$ dans Ω tout entier.
[AN-NA p88]

Corollaire 24 (principe des zéros isolés)
Si $f \in H(\Omega)$ où Ω est un ouvert connexe, non identiquement nulle et si $a \in Z(f) = \{z \in \Omega ; f(z) = 0\}$,
alors a possède un voisinage dans lequel f n'admet pas d'autre zéro.
Autrement dit, les zéros de f sont isolés. [AN-NA p133]

DVT

Exemple 25 (Fonction Γ d'Euler)
$\forall x > 0 \quad , \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt$
Cette fonction se prolonge en une fonction holomorphe dans l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$. [QZ p313]

Exemple 26 (Fonction ζ de Riemann)
Pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$
Cette fonction se prolonge en une fonction holomorphe dans l'ouvert $\{\mathrm{Re}(s) > 0\} \setminus \{1\}$. [QZ p20]

2. Comportement d'une série entière au bord du disque de CV.

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence égal à 1.
Pour $z \in D = D(0,1)$, on pose $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.
$\Gamma = \partial D = \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\}$

Déf 27:
- $a \in \Gamma$ est dit régulier s'il existe un disque ouvert D_a centré en a tel que f admette un prolongement analytique dans $D \cup D_a$.
- $a \in \Gamma$ est dit singulier s'il n'est pas régulier.
- $\mathcal{A}_r$ = ensemble des points réguliers
- $\mathcal{A}_s$ = ensemble des points singuliers. [QZ p50]

Exple 28:
Pour $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, $\mathcal{A}_r = \Gamma \setminus \{1\}$ et $\mathcal{A}_s = \{1\}$.
[QZ p51]

Th 29: Il y a toujours au moins un point singulier sur Γ; autrement dit, on a toujours $\mathcal{A}_s \neq \emptyset$.

[GOU] X. GOURDON - Les Maths en Tête - Analyse (2e édition)
[POM] A. POMMELLET - Cours d'analyse
[GX2] B. GOSTIAUX - Cours de maths spé. 2. Topologie, analyse réelle
[QZ] H. QUEFFELEC . C. ZUILY - Analyse pour l'agrégation (4e édition)
[BRE] H. BREZIS - Analyse fonctionnelle
[ROU] F. ROUVIERE - Petit guide du calcul différentiel
[TIS] C. TISSERON - Notions de topologie. Introduction aux espaces fonctionnels
[AN-NA] E. AMAR - E. MATHERON - Analyse complexe.

Théorème de prolongement par densité.

Enoncé : Soient (E,d) et (F,δ) des espaces métrique avec F complet. Soit
X une partie dense dans E et $f : X \to F$ une application uniformément continue
lors il existe une unique application $g : E \to F$ uniformément continue
elque $g_{|X} = f$

Application : Construction de l'intégrale de Riemann des fonctions réglées de
$[a,b] \to \mathbb{R}$.

i) Démonstration du Théorème

) existence de g : pour $x \in X$ on pose $g(x) = f(x)$, soit $x \in E \setminus X$, Par densité
de X dans E, $\exists (a_n)$ une suite d'éléments de X convergeant vers x. Montrons que
la suite $(f(a_n))$ est une suite de Cauchy dans l'espace complet F.
soit $\varepsilon > 0$, comme f est uniformément continue $\exists \eta > 0$ telque $\forall (u,v) \in X^2$
$d(u,v) \leq \eta \Rightarrow \delta(f(u), f(v)) \leq \varepsilon$, Mais comme (a_n) converge, elle est
de Cauchy dans X, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ telque $\forall p,q \geq N_0$ $d(a_p, a_q) \leq \eta$. Ainsi pour
$p,q \geq N_0$ on a $\delta(f(a_p), f(a_q)) \leq \varepsilon$. la suite $(f(a_n))$ est de Cauchy
dans F qui est complet, $(f(a_n))$ convergente dans F. notons l_a sa limite
$\forall n \in \mathbb{N}$ $g(a_n) = f(a_n)$, donc la continuité impose que $g(x) = l_a$.
Montrons $g(x)$ ne dépend pas du choix de la suite (a_n). Soient (a_n) et (b_n)
deux suites de X convergeant vers x. on considère la suite (c_n) définie
par $c_{2n} = a_n$ et $c_{2n+1} = b_n$. La suite (c_n) converge elle aussi vers x
par ailleurs, les suites $(f(a_n))$, $(f(b_n))$ et $(f(c_n))$ convergent respectivement
vers l_a, l_b, l_c, mais comme $(f(a_n))$ et $(f(b_n))$ sont deux suites extraites
de la suite $(f(c_n))$ alors $l_a = l_b = l_c$. donc la limite ne dépend pas de la
suite initiale, on peut bien poser $g(x) = \lim_{x_n \to x} f(x_n)$ $\forall x \in E \setminus X$

) Continuité de g : Montrons que g est uniformément continue, soit $\varepsilon > 0$ et
$(x,y) \in E^2$, comme f est uniformément continue, $\exists \alpha > 0$ $\forall (a,b) \in X^2$
telque $d(a,b) \leq \alpha$, on a $\delta(f(a), f(b)) \leq \varepsilon/3$, D'autre part soient (x_n) et (y_n)
deux suites de X convergeant respectivement vers x et y, comme $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$

nvergent respectivement vers $g(x)$ et $g(y)$, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ telque $\forall n \geq k_0$ on a simultanément $d(x_n, x) \leq \alpha/3$, $d(y_n, y) < \alpha/3$, $\delta(f(y_n), g(y)) \leq \varepsilon/3$ et $\delta(f(x_n), g(x)) \leq \varepsilon/3$, Or on a $d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y_n, y)$ insi si x et y sont telque $d(x,y) \leq \alpha/3$ on obtient $d(x_n, y_n) \leq \alpha$ et donc $\delta(f(x_n), f(y_n)) \leq \varepsilon/3$ Ce qui nous donne :

$$\delta(g(x), g(y)) \leq \delta(g(x), f(x_n)) + \delta(f(x_n), f(y_n)) + \delta(f(y_n), g(y)) \leq 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3}$$

et on a bien $\forall (x,y) \in E^2 \; (d(x,y) \leq \alpha/3 \Rightarrow \delta(g(x), g(y)) \leq \varepsilon)$

) Unicité de g :

upposons $\exists g_1, g_2$ deux prolongements de f sur E on a $\forall x \in X$, $g_1(x) = g_2(x) = f(x)$ soit $x \in E \setminus X$ comme X est dense dans E, $\exists x_n \to x$, la continuité de g_1 et g_2 implique $g_1(x) = \lim_{n \to +\infty} g_1(x_n) = \lim_{n\to+\infty} g_2(x_n) = g_2(x)$ d'où $g_1 = g_2$.

) Démonstration de l'application

oit E l'espace des fonction réglées de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme uniforme et X l'espace des fonctions en escalier de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Notons que X est dense dans E

oit $\phi \in X$: il existe une subdivision $(\alpha_i)_{i=1,\dots,n}$ de $[a,b]$ telleque ϕ soit constante, égale à C_i sur chaque ouvert $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$, $i \in [\![0, n-1]\!]$ n définit l'application

$$J : X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi \longmapsto \sum_{i=0}^{n-1} C_i(\alpha_{i+1} - \alpha_i)$$

J est linéaire continue car $|J(\phi)| \leq (b-a)\|\Phi\|_\infty$, donc uniformémen ontinue sur X. $\mathbb{R}$ est complet, le Théorème precédent montre qu'on peut rolonger continuement et de manière unique J à E tout entier. On a ainsi l'intégrale de Riemann des fonctions réglées.

Ref : Gostiaux T2 page 117, Pommelet page 49.

Prolongement de la fonction Gamma d'Euler

La fonction Gamma d'Euler, définie par

$$\Gamma : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

Possède un prolongement holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$

1) Lemme : la formule d'Euler

a) Énoncé

| $\forall x > 0$ on a $\Gamma(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^x\, n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$

) Preuve du lemme

Soit $x > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ on définit l'application :

$$f_n : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \mathbb{1}_{]0,n[}(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$$

De plus soit $f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$

$\forall t > 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}$. Ainsi la suite de fonction (f_n) converge simplement vers f sur $\mathbb{R}_*^+$.

D'autre part, l'application $\varphi : [0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \ln(1-x)$ est concave car sa dérivée seconde est en effet négative. Aussi la courbe representative de φ est au dessous de sa tangente en 0, ce qui se traduit par : $\forall x \in [0,1[$ $\ln(1-x) \leq -x$, Ainsi $\forall t \in]0,n[$ $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) \leq e^{-t}$

et finalement $\forall t \in \mathbb{R}_*^+$ $0 \leq f_n(t) \leq f(t)$

Comme f est intégrable sur $\mathbb{R}_*^+$, on applique le Théo de Convergence dominée ce qui se traduit par $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt = \int_0^{+\infty} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\, dt = \int_0^{+\infty} f(t)\, dt = \Gamma(x)$

pour $n \in \mathbb{N}^*$ notons $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt$, par le cht de var $t = nu$ on obtient $I_n = n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\, du$, pour $n \in \mathbb{N}$ posons $J_n(x) = \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\, du$

na $J_n(x) = \left[(1-u)^n \frac{u^x}{x}\right]_0^1 + \frac{n}{x}\int_0^1 (1-u)^{n-1} u^x \, du = \frac{n}{x} J_{n-1}(x+1)$

et ainsi par reccurence on a $J_n(x) = \frac{n(n-1)\cdots 1}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} J_0(x+n)$

r $J_0(x+n) = \int_0^1 u^{x+n-1} du = \frac{1}{x+n}$ Finalement $J_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$

la formule d'Euler s'en déduit immédiatement

) démonstration du Théorème

sur $x>0$, on a $\Gamma(x) \neq 0$, on peut considérer $\frac{1}{\Gamma(x)}$. De plus d'après

a formule d'Euler on a $\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{n^x \, n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{(n+1)^x \, n!}$

soit alors $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $K_n(z) = \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{(n+1)^z \, n!}$

n peut ecrire $K_n(z) = z \prod_{k=1}^{n} h_k(z)$ $k \in \mathbb{N}^*$ avec

$h_k(z) = (1+\frac{z}{k}) \exp(-z \log(1+\frac{1}{k}))$ et h_k sont holomorphes sur $\mathbb{C}$

soit $\rho > 0$ et $z \in D_\rho = \{w \in \mathbb{C} \,/\, |w| < \rho\}$ et k verifiant $k > \max(2\rho, 1)$

na donc $\left|\frac{z}{k}\right| < \frac{1}{2} < 1$ Aussi on peut ecrire

$h_k(z) = \exp(r_k(z))$ avec $r_k(z)$, Par le developpement de r_k en serie

entière, on trouve une constante $C(\rho)$ qui dépend de ρ telque $\forall z \in D_\rho$

t $k > \max(2\rho, 1)$ on a $|r_k(z)| \leq \frac{C(\rho)}{k^2}$, Comme $\sum \frac{1}{k^2}$ est

nvergente on en déduit que $\sum r_k$ converge uniformément dans D_ρ, les

pplications r_k étant holomorphes dans D_ρ, il en est de m̂ de la somme S

éfinie dans D_ρ par $S(z) = \sum_{k > \max(2\rho,1)} r_k(z)$

on a pour $n > \max(2\rho, 1)$

$K_n(z) = z\left(\prod_{1 \leq k \leq \max(2\rho,1)} h_k(z)\right)\left(\prod_{\max(2\rho,1) < k \leq n} \exp r_k(z)\right)$

$= z \text{ ——— } \exp\left(\sum_{\max(2\rho,1) < k \leq n} r_k(z)\right)$, on a donc l'existence de la limite

de $K_n(z)$ noté $K(z)$ et l'holomorphie dans D_ρ, mais comme $\rho \in \mathbb{R}_+^*$

est arbitraire on a l'holomorphie sur $\mathbb{C}$ tout entier, on voit que K admet

des zéros sur $\mathbb{Z}^- \cap D_\rho$ $\forall \rho \in \mathbb{R}_+^*$ donc sur $\mathbb{Z}^-$, on peut définir l'inverse

de K noté L qui est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ et qui coincide avec Γ sur $\mathbb{R}_*^+$