204 — Connexité. Exemples et applications.

[Q]

I Définitions et premières propriétés.

Soit X et Y deux espaces topologiques.

1) définition et premiers exemples.

def 1: X est <u>connexe</u> si toute application $\varphi : X \to \mathbb{Z}$ est constante.

ex 2: En particulier $\mathbb{Z}$ n'est pas connexe.

prop 3: X est connexe si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée:

- Si $X = O_1 \sqcup O_2$, O_1 et O_2 ouverts, alors $O_1 = \emptyset$ ou $O_2 = \emptyset$.
- Si $X = F_1 \sqcup F_2$, F_1 et F_2 fermés, alors $F_1 = \emptyset$ ou $F_2 = \emptyset$.
- Si $A \subset X$ est ouverte et fermée dans X, alors $A = \emptyset$ ou $A = X$

def 4: Une partie A de X est <u>connexe</u> si A munie de la topologie induite par X l'est.

prop 5: Soit $A \subset X$. Toute partie connexe C de X qui rencontre A et $X \setminus A$ rencontre ∂A.

remarque 6: Une intersection de deux parties connexes n'est pas nécessairement connexe (cf fig. 1).

Th. 7: $[0,1]$ est une partie connexe de $\mathbb{R}$.

prop 8: A est connexe dans $X \Rightarrow \bar{A}$ est connexe dans X.

2) Stabilité de la notion de connexité.

Th 9:
- Soit $f : X \to Y$ continue. Si X est connexe alors $f(X)$ est connexe.
- Si $A \subset B \subset \bar{A}$ et A est connexe, alors B est connexe.

Th 10: Si X et Y sont homéomorphes, alors: X est connexe ssi Y est connexe.

ex 11: $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $[a,b]$ est connexe.

remarque 12: La pré-image d'un connexe par une application continue n'est pas nécessairement connexe:
$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$, $[1,4]$ est connexe mais
$f^{-1}([1,4]) = [-2,-1] \cup [1,2]$ n'est pas connexe.

Th 13:
- Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille de connexes dans X avec: $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe.
- Si $A_1, \dots, A_n$ est une chaîne de connexes ($\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$), alors $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ est connexe. cf Fig. 2.

Th 14: Si $X = \prod_{i \in I} X_i$ s'écrit comme le produit au plus dénombrable des espaces topologiques associé à la topologie produit, alors: X est connexe ssi $\forall i \in I$, X_i connexe.

ex 15: On montre que $\mathbb{R}$ est connexe dans la prochaine partie. Alors: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n$ est automatiquement connexe.

3) Connexité par arcs.

Def 16. Un <u>chemin</u> reliant deux points a et b de X est une application continue: $\gamma : [0,1] \to X$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

ex 17: $\gamma : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{C} \\ t \mapsto e^{i\pi t} \end{cases}$ est un chemin reliant 1 et -1, cf. Fig. 3

Def 18 : X est connexe par arcs si pour tous points a et b de X, a et b sont reliés dans X.

ex 19 : $]0,1[$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$ sont connexes par arcs.

Th 20 : • X connexe par arcs $\Longrightarrow$ X connexe.

• Si X est un ouvert connexe d'un espace E localement connexe par arcs, alors X est connexe par arcs. En particulier, c'est vrai pour X ouvert connexe d'un espace vectoriel normé.

ex 21 : $]0,1[$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$ sont connexes.

C/ex 22 : Soit $Y_1 = \left\{(t, \sin \frac{1}{t}),\ t \in \mathbb{R}_+^*\right\} \subset \mathbb{R}^2$

$Y_2 = \{0\} \times [-1,1]$.

On a $\overline{Y_1} = Y_1 \cup Y_2$ est connexe mais non connexe par arcs.

cf Fig. 4.

4) Cas réel

Th 23 : Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles.

Th 24 : Théorème des valeurs intermédiaires :
Soit X connexe, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. alors $f(X)$ est un intervalle, i.e. si f prend deux valeurs α et β, alors f prend toutes les valeurs entre α et β.

Cor 25 : Théorème de Brouwer en dimension 1 :
toute fonction continue $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ possède au moins un point fixe.

Th 26 : Structure des ouverts de $\mathbb{R}$: Soit ω un ouvert de $\mathbb{R}$. Alors ω s'écrit : $\omega = \bigsqcup_{n \in I}]a_n, b_n[$ où l'union est disjointe, au plus dénombrable, $\forall n \in I$, $a_n \notin \omega$, $b_n \notin \omega$, $a_n \, \& \, b_n$ peut être $\pm\infty$.

ex 27 : $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\sqcup]0, +\infty[$.

5) Composantes Connexes.

def 28 : La plus grande partie connexe contenant $x \in X$ est la composante connexe de x

remarque 29 : Cette notion est bien définie grâce au Th 13.

prop 29 : les composantes connexes de X sont disjointes, fermées dans X.

prop 30 : Si $X = \bigsqcup_{i \in I} \omega_i$ où les ω_i sont ouverts connexes non vides, alors les (ω_i) sont les composantes connexes de X.

remarque 31 : on définit de même les composantes connexes par arcs.

II Application : passage du local au global

1) En analyse complexe.

Def 32 : $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un domaine si c'est un ouvert connexe non vide de $\mathbb{C}$. En particulier, $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{C}$, $D(0,1)$, $D(0,1) \setminus \{0\}$ sont des domaines.

soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$.

Th 33 : zéros isolés.
Soit $f \in H(\Omega)$ non nulle. Alors l'ensemble de ses zéros ne contient pas de points d'accumulation. De plus, pour $a \in \Omega$, on peut écrire : $f(z) = (z-a)^m g(z)$ où $g \in H(\Omega)$, $g(a) \neq 0$, $m \in \mathbb{N}$ et $m \geq 1$ si et seulement si $f(a) = 0$.

app° 34 : On a unicité du prolongement analytique sur un domaine contenant au moins un point d'accumulation.

[R]

ex 35 : prolongement à $\mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N})$ de Γ.

[Q] 2) En théorie des équations différentielles.

Def 36 : f est localement constante sur X si pour tout x de X, on dispose d'un voisinage V de x tel que f est constante sur V

prop 37 : Si X est connexe et $f : X \to Y$ est localement constante, alors f est constante.

app° 38 : Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable de dérivée nulle alors f est constante sur $\mathbb{R}$.

DEV1

Th 39 : Théorème de Cauchy-Lipschitz maximal.
Soit $t_0 \in \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}$, ouvert connexe tel que $t_0 \in \Omega$.
$f : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ localement lipschitzienne en la seconde variable. Alors il existe une solution maximale sur I intervalle de $\mathbb{R}$ contenant t_0, et deux solutions sont égales si et seulement si elles sont égales en un point t de I.

[QZ] p.361 et + ex 40 : Le problème de Cauchy $\begin{cases} x'(t) = x^2(t) \\ x(0) = x_0 > 0 \end{cases}$
admet une unique solution maximale :
$$x : \left| \begin{array}{l}]-\infty, \frac{1}{x_0}[\longrightarrow \mathbb{R}. \\ t \longmapsto \frac{x_0}{1-x_0 t} \end{array} \right.$$

C/ex 41 : Le problème de Cauchy $\begin{cases} x'(t) = 3x(t)^{\frac{2}{3}} \\ x(0) = 0 \end{cases}$
admet deux solutions C^1 : $x = 0$ et $x : t \longmapsto t^3$.
Car $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 3x^{\frac{2}{3}} \end{array} \right.$ n'est pas localement lipschitzienne en 0.

III Exemples : Connexité des groupes de matrices.

[MT] p.33-35.

Th 42 : $GL_n(\mathbb{R})$ admet deux composantes connexes :
$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}), \det(A) > 0\} \sqcup \{A \in GL_n(\mathbb{R}), \det(A) < 0\}$

prop. 43 : . $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe.
. $SL_n(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{C})$ sont connexes.

Th 44 : $O(n)$ a deux composantes connexes : $SO(n)$ et $\{P \in O(n), \det(P) = -1\}$.

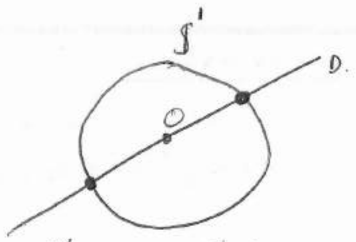
Th 45 : $SO(3)$ est simple.] DEV 2

. autres thèmes possibles : . logarithme continu.
. parties complètement discontinues.

. autres développements possible : . Théorème de Lyapunov.
. Théorème de Brouwer en dim° 2.
. Surjectivité de l'exponentielle matricielle

. Références : . [Q] Queffélec, Topologie
. [R] Rudin, Analyse réelle et complexe.
. [MT] Mneimné, Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques
. [QZ] Queffélec - Zuily, Analyse pour l'agrégation.

Fig 1:



D connexe, $\mathbb{S}^1$ connexe, $\mathbb{S}^1 \cap D$ non connexe.

Fig 2:

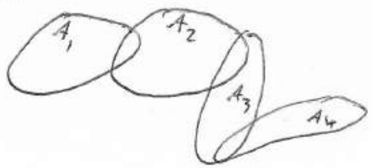


Fig 3:

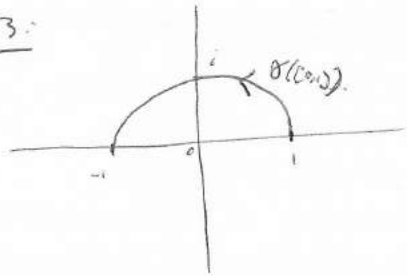


Fig 4: