190

Méthodes combinatoires. Problèmes de dénombrement.

I. Outils classiques de dénombrement.

[DB] p6 **Déf 1:** Un ensemble E est dit fini et de cardinal n lorsque il est vide ou $n>0$ et il existe une bijection $\varphi : E \to [\![1,n]\!]$. On note $|E|=n$ et on dit que E est un n-ensemble.

1. Union d'ensembles finis.

[DB] p6 **Th. 2:** Formule du crible. Soient $(E_i)_{1\le i\le n}$ des ensembles finis.
On a : $\left|\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right| = \sum_{1\le i\le n}|E_i| - \sum_{1\le i<j\le n}|E_i\cap E_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n}|E_i\cap E_j\cap E_k| + \dots + (-1)^{n-1}\left|\bigcap_{1\le i\le n} E_i\right|$

Cor 3: Si les E_i sont disjoints, ils forment une partition et $\left|\bigcup_{1\le i\le n} E_i\right| = \sum_{1\le i\le n}|E_i|$

[DB] p19 **Cor 4:** Lemme des bergers. Soient A et B deux ensembles finis. Si $\forall x\in B$, $|\varphi^{-1}(x)|=n$ où $\varphi : A\to B$ alors $|A|=n|B|$.

[DB] p8 **Applications 5:** Il y a 775 nombres à 3 chiffres ayant au moins un chiffre pair.

* Indicatrice d'Euler $n\in\mathbb{N}^*$, $\varphi(n)=|\{k\in\mathbb{N}^*, k\le n : k\wedge n=1\}|$

Fonction de Möbius $n\in\mathbb{N}^*$, $\mu(n)=\begin{cases}1 & \text{si } n=1\\ 0 & \text{si } n \text{ a un facteur carré}\\ (-1)^k & \text{si } n=p_1\cdots p_k\end{cases}$

où les p_i sont premiers, 2 à 2 distincts.

Prop 6: $\sum_{d|n}\varphi(d)=n$ et $\sum_{d|n}\mu(d)=\delta_{1,n}$.

[FGN] p16 * $|SO_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})| = \begin{cases}2 & \text{si } p=2\\ p-1 & \text{si } p\equiv 1[4]\\ p+1 & \text{si } p\equiv 3[4]\end{cases}$ où p premier.

* le principe des tiroirs.

2. Produit d'ensembles finis.

[DB] p7 **Déf 7:** Soient $A_1,\dots A_p$ p ensembles finis, on appelle p-uplet tout élément de la forme $(x_1,\dots x_p)$ où $\forall i\in[\![1,p]\!]$, $x_i\in A_i$.

On note $A_1\times\dots\times A_p$ l'ensemble de ces p-uplets.

Th. 8: $|A_1\times\dots\times A_p| = \prod_{i=1}^{p}|A_i|$. [DB] p7

Application 9: le cardinal de l'ensemble des applications de X dans Y, où $|X|=n$ et $|Y|=p$ est p^n. [DB] p7

Ex: Il y a n^p possibilités pour tirer avec remise p boules parmi n boules. [DB] p8

3. Arrangements, permutations et combinaisons.

Déf 10: Soient $p,n\in\mathbb{N}^*$, $p\le n$. Soit E un n-ensemble, un arrangement de E p à p est un p-uplet formé de p éléments de E 2 à 2 distincts. [DB] p7

Si $n=p$: on dira permutation.

Prop 11: On peut identifier arrangement de E p à p et injection de $[\![1,p]\!]$ dans E. [DB] p7

Th. 12: Le nombre d'arrangements p à p de E où $|E|=n$ est
$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$ [DB] p7

Applications 13: * Il y a A_n^p possibilités pour un tirage ordonné sans remise de p boules parmi n boules. [DB] p8

* $|\mathfrak{S}_n|=n!$ où $\mathfrak{S}_n=\{$ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]\}$ [DB] p8

Déf 14: Soit E un n-ensemble et $p\le n$, une combinaison p à p de E est une sous partie de E à p éléments. [DB] p10

Th 15: Le nombre de combinaisons p à p d'un n-ensemble est $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ [DB] p10

Prop 16: Soient $1\le p\le n$: $\binom{n}{p}=\binom{n}{n-p}$ et $\binom{n}{p}=\binom{n-1}{p}+\binom{n-1}{p-1}$ [DB] p10

Applications 17: * Formule du binôme
$\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2$, $\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^p b^{n-p}=(a+b)^n$ [DB] p12

* Pour 20 chevaux au départ, il y a 6840 tiercés dans l'ordre et 1140 dans le désordre. [DB] p14

(DB) p11 * Triangle de Pascal : chaque nombre est la somme des deux nombres situés au-dessus et au-dessus à gauche. C'est la matrice Π de coefficients C_i^j avec $C_i^j = 0$ si $j > i$.

(DB) p13 * Inverse de la matrice de Pascal Π^{-1} de coefficients $(-1)^{i-j} C_i^j$.

ex $\Pi_5 = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ et $\Pi_5^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ -1 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ -1 & 3 & -3 & 1 & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

(DB) p13. * Le nombre de surjections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$ est $\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k}(p-k)^n$ où $p \leq n$.

II. Utilisation des actions de groupes.

Soit G un groupe qui agit sur un ensemble fini X. On note $Orb(x)$ et $Stab(x)$ respectivement l'orbite et le stabilisateur de $x \in X$.

[C] p183 Th 18 : $|X| = \sum_{i=1}^{R} |Orb(x_i)|$ où $\{x_i\}_{1\leq i\leq R}$ famille de représentants des orbites de l'action de G sur X.

[C] p75 Application 19 : * Théorème de Lagrange : Pour tout sous-groupe H d'un groupe fini G, on a $|H| \mid |G|$.

[C] p182 Th 20 : $\forall x \in X$, $|G| = |Orb(x)| \cdot |Stab(x)|$

[FGN] p15 Application 21 : * $|GL_n(\mathbb{F}_q)| = \prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i)$ par action de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ sur {bases de $\mathbb{F}_q$}.
On peut en déduire $|SL_n(\mathbb{F}_q)| = \frac{1}{q-1} \prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i)$. par le det

DVPT 1 * Il y a $\sum_{n_1+\dots+n_{q-1}=n} \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{|GL_{n_1}(\mathbb{F}_q)| \cdots |GL_{n_{q-1}}(\mathbb{F}_q)|}$ matrices diagonalisables dans $GL_n(\mathbb{F}_q)$. (et de $M_n(\mathbb{F}_q)$)?

[C] p202 Th 22 : Double comptage Soient X, Y deux ensembles finis et $S \subseteq X \times Y$. Alors

$|S| = \sum_{a \in X} |S(a,\cdot)| = \sum_{b \in Y} |S(\cdot,b)|$ où $S(a,\cdot) = \{(x,y) \in S,\ x = a\}$ et $S(\cdot,b) = \{(x,y) \in S,\ y = b\}$.

Th 23 : Burnside $\sum_{g \in G} |Fix(g)| = t|G|$ où t = nombre d'orbite de l'action de G sur X et $Fix(g) = \{x \in X,\ gx = x\}$, $\forall g \in G$. [C] p203

Application 24 : * Coloriage d'un cube.

III Séries génératrices, fonctions arithmétiques

1- Fonctions arithmétiques

Déf 25 : Une fonction arithmétique est une application $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ [P] p3

Ex : * $e(1) = 1$, $e(n) = 0$ $\forall n > 1$ [P] p3-4
* $\zeta(n) = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$
* Indicatrice d'Euler φ
* Fonction de Möbius μ

Les fonctions arithmétiques sont manipulées au moyen de séries. Ici on ne considère ces séries que formellement et on n'étudiera pas la convergence.

2- Séries génératrices classiques.

Déf 26 : Soit a une fonction arithmétique, $\sum_{n \geq 0} a(n) z^n$ est la série génératrice associée à a.

Applications 27 : * Nombres de Catalan : $C_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$ représente le nombre de triangulations d'un polygone convexe. [DB] p20

* Nombres de Bell : $B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$ représente le nombre de partitions de $[\![1,n]\!]$. [FGN] p12

DVPT 2 * Partition d'un entier en parts fixées :
Soient $a_1, \dots a_k \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux, fixés.

Soit u_n = le nombre de solutions dans $\mathbb{N}^k$ de $\sum_{i=1}^k a_i x_i = n$ alors $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\prod_i a_i} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$. [FGN 2] p199

3 - Séries de Dirichlet.

Déf 28 : Soit a une fonction arithmétique, $\sum_{n=1}^{\infty} a(n) n^{-s}$ est la série de Dirichlet associée à a. [P] p11

On munit l'ensemble des fonctions arithmétiques d'un produit de convolution qui lui donne la structure d'algèbre.

Déf 29 : Soient f et g deux fonctions arithmétiques, on définit le produit de convolution $f*g$ par : $f*g(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$.

Ce qui donne au niveau des séries de Dirichlet : [P] p7

$$\forall s, \left(\sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^{-s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} g(n) n^{-s}\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f*g(n) n^{-s}\right).$$

Ex : $\mu * \mathfrak{z} = e$ ie $\zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = 1$

[P] p7/12

Application 30 : * Inversion de Möbius Soient f, g deux fonctions arithmétiques, on a $g = \mathfrak{z} * f$ ssi $f = \mu * g$

[P] p8 ie $\forall n \in \mathbb{N}^*, g(n) = \sum_{d|n} f(d)$ ssi $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$

on peut en déduire la formule d'Euler : $\varphi(n) = \sum_{d|n} d\, \mu\left(\frac{n}{d}\right)$

* Probabilité que $a \wedge b = 1$ avec $a, b \in [\![1, n]\!]$ tend vers $\frac{6}{\pi^2}$ quand n tend vers $+\infty$.

FGN p142

Références :

De Biasi, Mathématiques pour le Capes et l'agreg interne [DB]

D. P. Parent, Exercises in number theory [P]

Oraux X-ENS algèbre 1 [FGN]
analyse 2 [FGN 2]

J. Calais, Éléments de théorie des groupes [C]

Partitions d'un entier en parts fixées

Soient $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux dans leur ensemble

Soit $n \geqslant 1$. On note : $u_n = \#\left\{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k \mid a_1 x_1 + \dots + a_k x_k = n\right\}$

$$\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_k} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}}$$

On considère le produit de Cauchy des séries $\underbrace{\sum_{x_i \in \mathbb{N}} z^{x_i a_i}}_{= \frac{1}{1 - z^{a_i}}}$; le coefficient de z^n de ce produit est :

$$\sum_{\substack{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k \\ a_1 x_1 + \dots + a_k x_k = n}} 1 = u_n .$$

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 - z^{a_i}} \quad \left(= \prod_{i=1}^{k} \left(\sum_{x_i = 0} z^{x_i a_i} \right) \right)$.

f est la série génératrice de la suite u_n.

f est une fraction rationnelle dont les pôles sont les racines a_i-èmes de l'unité, pour $i \in [\![1, k]\!]$.

- Le pôle 1 est de multiplicité k.
- Les autres pôles sont de multiplicité $< k$:

En effet : Si ω est de multiplicité k, $\forall i$, $\omega^{a_i} = 1$.
Par Bézout, comme les $(a_i)_{1 \leq i \leq k}$ sont premiers entre eux dans leur ensemble,
$\exists\ v_1, \dots, v_k$, $a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = 1$

Ainsi : $\omega = \omega^{\sum_{i=1}^{k} a_i v_i} = \prod_{i=1}^{k} (\omega^{a_i})^{v_i} = 1$.

Ainsi, si $P = (\omega_1, \dots, \omega_p)$ l'ensemble des pôles de f, on a :

$$f(z) = \frac{\alpha}{(1-z)^k} + \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq k-1}} \frac{c_{ij}}{(\omega_i - z)^j}, \text{ avec } \alpha, (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq k-1}} \in \mathbb{C}.$$

Ensuite, on développe chaque terme en série entière.

Soit $w \in P$, soit $j \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w}\,\frac{1}{1-\frac{z}{w}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{w^{n+1}}$$

$$\frac{1}{(w-z)^2}$$

Puis $\frac{\cancel{(j-1)!}\ j!}{(w-z)^{j+1}}$ est la dérivée $\cancel{(j-1)}\ j^{\text{è}}$ de $z \mapsto \frac{1}{w-z}$.

On obtient (dérivation terme à terme) :

$$\frac{(j+1)!}{(w-z)^j} = \sum_{n=j-1}^{+\infty} \frac{n!}{(n-j+1)!}\,\frac{z^{n-j+1}}{w^{n+1}}$$

$$\frac{1}{(w-z)^j} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+j-1)!}{n!\,(j-1)!}\,\frac{z^n}{w^{n+j}} \implies \underline{\frac{1}{(w-z)^j} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+j-1}{n} \frac{z^n}{w^{n+j}}}$$

Donc $f(z) = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k-1}{n} z^n + \sum_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le k-1}} c_{ij} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+j-1}{n} \frac{z^n}{w_i^{n+j}}$

Ainsi (on ~~inverse~~ les sommes) : le coefficient de degré n est :

$$u_n = \alpha \binom{n+k-1}{n} + \sum_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le k-1}} c_{ij} \binom{n+j-1}{n} w_i^{-n-j}$$

or à l fixé : $\binom{n+l-1}{n} = \frac{(n+l-1)(n+l-2)\dots(n+1)}{(l-1)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{l-1}}{(l-1)!}$ (l est $\le k$, k fixé)

Ainsi, $\underline{u_n \sim_{+\infty} \alpha \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}}$ (les termes de la somme~~s~~ sont en $\frac{n^{j-1}}{(j-1)!}$, $j<k$, donc sont négligeables)

$$(1-z)^k f(z) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1-z}{1-z^{a_i}} = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1+z+\dots+z^{a_i-1}}$$

On évalue en "$z=1$" : $\alpha = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i \times 1} = \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_k}$

Ainsi $\boxed{u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_k}\,\frac{n^{k-1}}{(k-1)!}}$

Nombres de Bell.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On note B_n le nombre de partitions de $[\![1,n]\!]$ (On pose $B_0 = 1$)

<u>Alors</u> : $\forall n \in \mathbb{N},\ B_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note $E_k = \left\{ \text{partitions de } [\![1,n+1]\!] \mid |\overline{n+1}| = k+1 \right\}$.

Les E_k forment une partition de l'ensemble des partitions de $[\![1,n+1]\!]$.

Ainsi $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} |E_k|$

or $|E_k| = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{on choisit les éléments de } \overline{n+1}} \underbrace{B_{n-k}}_{\text{on partitionne le reste}}$.

Donc $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}$

$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$.

<u>Maintenant</u> : posons $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$. (série FORMELLE)

<u>Alors</u> $f(z) = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} z^{n+1}$ et $f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_{n+1}}{n!} z^n$

<u>Donc</u> $f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \right) z^n$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{B_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} \right) z^n$ (FORMELLE).

$\underset{\text{(produit de Cauchy)}}{=} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \right) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = f(z) e^z$

<u>Ainsi</u>, $\exists C \in \mathbb{R},\ f(z) = C e^{e^z}$. Comme $f(0) = B_0 = 1 = C e^{e^1}$, $C = \frac{1}{e}$

Donc $f(z) = \frac{1}{e} e^{e^z}$.

Maintenant, on écrit :

$$e^{e^z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{nz}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(nz)^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!} \right) z^k \qquad \text{(FORMELLE)}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!} \right) z^n$$

Par unicité du développement : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\underline{\underline{B_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}}}$.