Leçon 181 : Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

Dans tout ce qui suit, $\mathcal{E}$ est un espace affine réel de dimension finie, de direction E.

I Barycentres.

Déf 1 : Soit $(A_i, \lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie de points pondérés de $\mathcal{E}$. La fonction vectorielle de Leibniz associée à (A_i, λ_i) est la fonction
$$f : \mathcal{E} \longrightarrow E, \quad M \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}.$$

Prop 2 : La fonction vectorielle de Leibniz associée à (A_i, λ_i) est une application affine de partie linéaire $\left(-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) Id_E$.
En particulier : - si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$, f est constante.
- si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$, f est une bijection affine de $\mathcal{E}$ sur E.

Déf 3 : Soit (A_i, λ_i) une famille finie de points pondérés de $\mathcal{E}$, avec $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$. Le barycentre de (A_i, λ_i) est l'unique point G de $\mathcal{E}$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$. On le note $\mathrm{Bar}(A_i, \lambda_i)$.

Prop 4 : - Homogénéité : Si $\mu \neq 0$, $\mathrm{Bar}(A_i, \mu \lambda_i) = \mathrm{Bar}(A_i, \lambda_i)$.
- Associativité : Si $(I_k)_{k \in K}$ est une partition de $[\![1, n]\!]$ avec $\mu_k = \sum_{i \in I_k} \lambda_i \neq 0$ $\forall k \in K$, alors si on pose $G_k = \mathrm{Bar}(A_i, \lambda_i)_{i \in I_k}$, on a $\mathrm{Bar}((G_k, \mu_k))_{k \in K} = \mathrm{Bar}(A_i, \lambda_i)_{i \in [\![1, n]\!]}$.

Ex 5 : Si A, B, C sont trois points non alignés, alors les médianes du triangle ABC sont concourantes en un point, appelé centre de gravité du triangle, qui est le barycentre de la famille $((A,1),(B,1),(C,1))$.

Rmq 6 : Si (A_i, λ_i) vérifie $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, alors le barycentre de (A_i, λ_i) est la combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_i$ dans le vectorialisé de $\mathcal{E}$ par rapport à n'importe quel point de $\mathcal{E}$.

Prop 7 : Une partie non vide $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ est un sous-espace affine si et seulement si $\mathcal{F}$ est stable par barycentres.

App 8 : Si $\mathcal{A}$ est une partie non vide quelconque de $\mathcal{E}$, $\mathrm{Aff}(\mathcal{A})$ le sous-espace affine de $\mathcal{E}$ engendré par $\mathcal{A}$ est l'ensemble des barycentres de points de $\mathcal{A}$.

Prop 9 : Si $\mathcal{F}$ est un autre espace affine réel de dimension finie, une application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est affine si et seulement si pour toute famille (A_i, λ_i) avec $\sum \lambda_i \neq 0$, on a $f(\mathrm{Bar}(A_i, \lambda_i)) = \mathrm{Bar}(f(A_i), \lambda_i)$.

Rmq 10 : Il suffit en fait de le vérifier pour les familles de deux points de la forme $((A, \lambda), (B, (1-\lambda)))$. Ce ne serait pas suffisant si on se plaçait ~~sur~~ dans un espace affine sur un corps de caractéristique 2.

App 11 : Toute isométrie entre deux espaces affines euclidiens est affine.

Déf 12 : Une famille non vide $(A_i)_{i \in I}$ de points de $\mathcal{E}$ est une base affine de $\mathcal{E}$ si elle engendre $\mathcal{E}$ ((A_i) est affinement génératrice) et pour tout $i \in I$, $A_i \notin \mathrm{Aff}((A_j)_{j \in I \setminus \{i\}})$ ((A_i) est affinement libre).

Prop 13 : On a équivalence entre : (i) $(A_i)_{i \in I}$ est une base affine de $\mathcal{E}$.
(ii) $\exists i \in I$, $(\overrightarrow{A_iA_j})_{j \in I \setminus \{i\}}$ est une base de E.
(iii) $\forall i \in I$, $(\overrightarrow{A_iA_j})_{j \in I \setminus \{i\}}$ est une base de E.

Prop-Déf 14 : Si $(A_i)_{i \in I}$ est une base affine de $\mathcal{E}$, alors pour tout point M de $\mathcal{E}$, il existe une famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ de scalaires avec $\sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$ telle que $M = \mathrm{Bar}(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$. Cette famille est unique à multiplication par un scalaire $\neq 0$ près. Si on impose $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$, cette famille est unique, elle est appelée la famille des coordonnées barycentriques de M dans la base affine $(A_i)_{i \in I}$.

Déf 15 : Si $\mathcal{E}$ est ~~un~~ un plan affine, e une base de E, et $A, B, C \in \mathcal{E}$, on pose $(A,B,C)_e := \det_e(\vec{AB}, \vec{AC})$.

Prop 16 : Soit (A,B,C) une base affine d'un plan affine $\mathcal{E}$, e une base ~~affine~~ de sa direction E, et $M \in \mathcal{E}$. Alors les coordonnées barycentriques de M dans la base affine (A,B,C) sont $\left(\frac{(M,B,C)_e}{(A,B,C)_e}, \frac{(A,M,C)_e}{(A,B,C)_e}, \frac{(A,B,M)_e}{(A,B,C)_e}\right)$.

App 17 : Coordonnées barycentriques du centre du cercle inscrit, du centre du cercle circonscrit et de l'orthocentre d'un triangle ABC.

II Convexité.

Déf 18 : Une partie C de $\mathcal{E}$ est dite convexe si pour tous $A, B \in C$, on a $[A,B] \subset C$.

Ex 19 : - Les sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ sont convexes.
- Les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.
- Les boules dans un espace vectoriel normé.

Prop 20 : Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application affine. L'image directe d'une partie convexe de $\mathcal{E}$ par f est une partie convexe de $\mathcal{F}$. L'image réciproque d'une partie convexe de $\mathcal{F}$ par f est une partie convexe de $\mathcal{E}$.

Prop 21 : Si $C \subset \mathcal{E}$ et $D \subset \mathcal{F}$ sont convexes, alors $C \times D \subset \mathcal{E} \times \mathcal{F}$ est convexe.

Prop 22 : Si $(C_i)_{i \in I}$ est une famille de convexes de $\mathcal{E}$, alors $\bigcap_{i \in I} C_i$ est convexe.

Prop 23 : Si C est convexe, alors tout ~~bary~~ barycentre à coefficients positifs de points de C est dans C.

Prop 24 : Si C est une partie convexe d'un espace affine normé $\mathcal{E}$, alors $\mathring{C}$ et $\overline{C}$ sont convexes. On a $\mathrm{Aff}(C) = \mathcal{E}$ si et seulement si $\mathring{C} \neq \emptyset$. Si $\mathring{C} \neq \emptyset$, on a $\overline{\mathring{C}} = \overline{C}$.

Déf 25 : Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$, l'enveloppe convexe de $\mathcal{A}$, notée $\mathrm{Conv}(\mathcal{A})$, est l'intersection de tous les convexes contenant $\mathcal{A}$. C'est le plus petit convexe contenant $\mathcal{A}$.

Prop 26 : L'enveloppe convexe de $\mathcal{A}$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de somme 1 de points de $\mathcal{A}$.

Thm 27 : (Carathéodory) : Si $\dim(\mathcal{E}) = n$, alors tout point de $\mathrm{Conv}(\mathcal{A})$ est barycentre à coefficients positifs d'au plus $n+1$ points de $\mathcal{A}$.

Cor 28 : Si $\mathcal{E}$ est un espace affine normé, l'enveloppe ~~conv~~ convexe d'un compact est compacte. En particulier, l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points est compacte.

Prop 29 : Si C est une partie convexe fermée non vide d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$, alors pour tout point $M \in \mathcal{E}$, il existe un unique point $p_C(M) \in C$ tel que $d(M, C) = d(M, p_C(M))$.

Thm 30 : (admis) (Motzkin) Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{E}$ telle que pour tout point $M \in \mathcal{E}$, il existe un unique point $p_{\mathcal{A}}(M) \in \mathcal{A}$ tel que $d(M, \mathcal{A}) = d(M, p_{\mathcal{A}}(M))$. Alors $\mathcal{A}$ est un convexe fermé non vide de $\mathcal{E}$.

Thm 31 : (Gauss-Lucas) : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Alors toute racine de P' appartient à l'enveloppe convexe des racines de P.

Déf 32 : Soient $\mathcal{H}$ un hyperplan de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{E}$ où $\mathcal{E}$ est un espace affine normé de dimension finie. On dit que $\mathcal{H}$ sépare $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ si $\mathcal{A}$ est inclus dans l'un des demi-espaces fermés déterminés par $\mathcal{H}$ et $\mathcal{B}$ dans l'autre. On dit que $\mathcal{H}$ sépare strictement $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ si $\mathcal{A}$ est inclus dans l'un des demi-espaces ouverts déterminés par $\mathcal{H}$ et $\mathcal{B}$ dans l'autre.

Thm 33 : Soient A, B ~~sont~~ deux convexes non vides disjoints d'un espace affine normé E.

- Si A est ouvert, il existe un hyperplan qui sépare A et B.
- Si A est compact et B fermé, il existe un hyperplan qui sépare strictement A et B.

Déf 34 : Soit C un convexe de E. Un point $M \in C$ est dit extrémal si dès que M est barycentre à coefficients positifs de deux points P, Q de C, on a $M=P$ ou $M=Q$. On note $\mathrm{Extr}(C)$ l'ensemble des points extrémaux de C.

Déf 35 : Si A est une partie d'un espace affine normé E et $M \in A$, un hyperplan d'appui de A en M est un hyperplan passant par M et qui sépare A et M.

Lemme 36 : Si C est une partie convexe et fermée de E, il existe un hyperplan d'appui en tout point de la frontière ∂C de C.

Lemme 37 : Si C est un convexe compact de E, alors $C = \mathrm{Conv}(\partial C)$.

Thm 38 : (Krein-Milman) : Si C est un convexe compact de E, on a $C = \mathrm{Conv}(\mathrm{Extr}(C))$.

Thm 39 : Soient $\cancel{d}$ $n = \dim(E)$, et I un ensemble contenant au moins $n+1$ éléments. Si $(C_i)_{i\in I}$ est une famille de convexes telle que l'intersection de $n+1$ des C_i soit toujours non vide. Alors si tous les C_i sont compacts, ou si I est fini, on a $\bigcap_{i\in I} C_i \neq \emptyset$.

III Fonctions convexes.

Déf 40 : Si C est une partie convexe de E, une fonction $f : C \to \mathbb{R}$ est dite convexe si : $\forall A, B \in C$, $\forall \lambda \in [0,1]$, $f(\lambda A + (1-\lambda)B) \leq \lambda f(A) + (1-\lambda) f(B)$.
f est dite strictement convexe si l'inégalité précédente est stricte dès que $A \neq B$ et $\lambda \neq 0,1$.

Rmq 41 : $f : C \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si son épigraphe $\{(A,x) \in E \times \mathbb{R},\ x \geq f(A)\} \subset E \times \mathbb{R}$ est convexe.

Prop 42 : (Inégalité de Jensen) : Si $f : C \to \mathbb{R}$ est convexe, $(A_i)_{1\leq i \leq n} \in C^n$ et $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n} \in [0,1]^n$ avec $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, alors $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(A_i)$.
Si f est strictement convexe et il existe A_i, A_j distincts avec $\lambda_i, \lambda_j > 0$, l'inégalité précédente est stricte.

Ex 43 : Les fonctions affines sont convexes.
La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe.

Prop 44 : Si f est convexe, alors : $\forall a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]-\infty, a])$ et $f^{-1}(]-\infty, a[)$ sont convexes.

Prop 45 : Une combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions convexes est convexe.
Une limite simple de fonctions convexes est convexe.

Prop 46 : Une fonction convexe définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est continue.

Prop 47 : Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si ~~pour~~ pour tous $x_1 < x_2 < x_3 \in I$, on a : $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$.

Prop 48 : Soit C un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$. Soit $f : C \to \mathbb{R}$ une application. Alors :
(i) Si f est différentiable, alors f est convexe si et seulement si pour ~~tout~~ tous $x, y \in C$, $f(y) \geq f(x)$ ~~$f(x)$~~ $+ df(x)\cdot(y-x)$.
(ii) Si f est deux fois différentiable, alors f est convexe si et seulement si la forme bilinéaire $d^2f(x)$ est positive $\forall x \in C$.

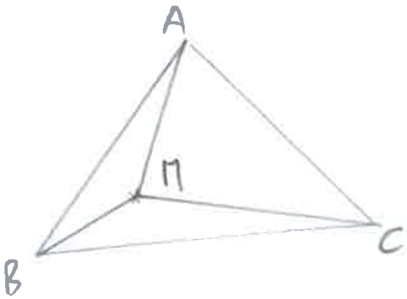
Prop 49 : Une fonction strictement convexe admet au plus un minimum.

Prop 50 : Une fonction convexe différentiable admet un minimum en chaque point critique.

Prop 51 : Si E est un espace euclidien, alors une application $J : E \to \mathbb{R}$ atteint son minimum sur tout convexe fermé de E.

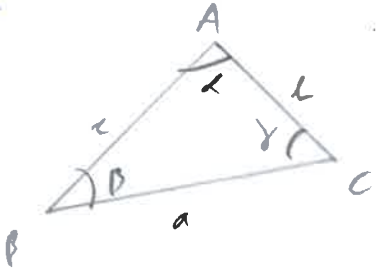
ANNEXE :

Page 16 :



$M = \mathrm{Bar}\big((A, \mathrm{Aire}(BMC)), (B, \mathrm{Aire}(AMC)), (C, \mathrm{Aire}(AMB))\big)$.

Page 17 :



Centre du cercle inscrit : $I = \mathrm{Bar}\big((A,a),(B,b),(C,c)\big)$.

Centre du cercle circonscrit : $O = \mathrm{Bar}\big((A, \sin(2\alpha)),(B, \sin(2\beta)),(C, \sin(2\gamma))\big)$.

Orthocentre : $H = \mathrm{Bar}\big((A, \tan(\alpha)),(B, \tan(\beta)),(C, \tan(\gamma))\big)$.

Développements :
- Théorème 27 et corollaire 28.
- Théorème 39.

Références :
Audin, *Géométrie*.
Berger, *Géométrie* (Volumes 1 et 2).
Tauvel, *Géométrie*.