181. Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine réel de dimension $n < +\infty$, de direction V.

I Barycentres

1) Définitions et premières propriétés

Def 1: Un système de points pondérés est la donnée d'un nombre fini de couples $(A_i, \lambda_i) \in (\mathcal{E} \times \mathbb{R})^d$

Def 2: La fonction de Leibniz associée est l'application
$$L : M \in \mathcal{E} \longmapsto \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \overrightarrow{MA_i} \in V$$

Prop 3: La fonction de Leibniz est soit constante soit bijective, et elle est constante ssi $\sum_{i=1}^{d} \lambda_i = 0$

Def 4: Si $\sum_{i=1}^{d} \lambda_i \neq 0$, on définit le barycentre du système de points (A_i, λ_i) comme l'unique $G \in \mathcal{E}$ tel que:
$$L(G) = 0$$

Ex 5: $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$, $A_1 = (0,0)$, $A_2 = (1,0)$, $A_3 = (0,1)$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, Le barycentre est $G =$

Not 6: Si le barycentre du système (A_i, λ_i) est bien défini, on le note $\mathrm{bar}(A_i, \lambda_i)$.

Prop 7:
* homogénéité: Si $c \neq 0$, $\mathrm{bar}(A_i, c\lambda_i) = \mathrm{bar}(A_i, \lambda_i)$
* commutativité: $\mathrm{bar}((A,\lambda),(B,\mu)) = \mathrm{bar}((B,\mu),(A,\lambda))$
* associativité: si $I_1 \sqcup I_2 = [\![1, d]\!]$, alors:
$$\mathrm{bar}(A_i, \lambda_i) = \mathrm{bar}((B_1, \mu_1), (B_2, \mu_2)), \text{ où}:$$
$$B_j = \sum_{i \in I_j} \lambda_i, \quad \mu_j = \sum_{i \in I_j} \lambda_i$$

Def 8: l'isobarycentre des points $(A_i)_{i=1}^{d}$ est $G = \mathrm{bar}(A_i, 1/d)$

App 9:
* calcul des coordonnées du centre de gravité (ou isobarycentre) d'un triangle équilatéral
* calcul de l'isobarycentre des sommets du tétraèdre

2) Lien avec la structure affine

Def 10: Le sous-espace affine engendré par $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ est le plus petit sous-espace affine contenant $\mathcal{A}$, on le note $\mathrm{Aff}(\mathcal{A})$.

Prop 11: Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$, $\mathcal{A} \neq \emptyset$, $\mathrm{Aff}(\mathcal{A})$ est l'ensemble des barycentres de points de $\mathcal{A}$.

Ex 12:
* Si $\mathcal{A} = \{A, B\}$, $A \neq B$, alors $\mathrm{Aff}(\mathcal{A})$ est la droite (A, B)
* Si $\mathcal{A} = \{A, \mathcal{D}\}$, où $\mathcal{D}$ est une droite de E et $A \notin \mathcal{D}$, alors $\mathrm{Aff}(\mathcal{A})$ est l'unique plan affine de $\mathcal{E}$ contenant A et $\mathcal{D}$.

Prop 13: $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ ssi il est stable par barycentre

C-ex 14: La réunion de deux droites distinctes n'est jamais un sous-espace affine.

Def 15: $\mathcal{E}'$, $\mathcal{F}$ deux espaces affines de directions respectives V et W. Une application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est dite **affine** s'il existe $\vec{f} : V \to W$ linéaire telle que: $\forall M \in E$, $\forall \vec{v} \in V$:
$$f(M + \vec{v}) = f(M) + \vec{f}(\vec{v})$$

Prop 16: Une application $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est affine ssi elle conserve les barycentres, i.e. $f(\mathrm{bar}(A_i, \lambda_i)) = \mathrm{bar}(f(A_i), \lambda_i)$

Coro 17: Si f est affine et $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$, $\mathcal{A} \neq \emptyset$, alors
$$f(\mathrm{Aff}(\mathcal{A})) = \mathrm{Aff}(f(\mathcal{A}))$$

C-ex 18: Réciproque fausse: $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$

3) Coordonnées barycentriques

Def 19: Une famille finie de $p+1$ points de $\mathcal{E}$ est dite affinement libre si le sous-espace affine qu'elle engendre est de dimension p.

Ex 20:
* un point est toujours affinement libre
* trois points sont affinement libres ssi ils ne sont pas alignés
* si $(A_i)_{1 \leq i \leq p+1}$ est affinement libre, alors $p \leq n$

Prop 21: La famille $\{A_0, \dots, A_p\} \subset \mathcal{E}$ est affinement libre ssi $\forall i_0 \in [\![0, p]\!]$, la famille $\{\overrightarrow{A_{i_0} A_i}\}_{i \neq i_0}$ est libre dans l'espace vectoriel V.

Def 22 : Une famille de $n+1$ points de $\mathcal{E}$ qui est affinement libre est appelée repère affine.

Thm 23 : Si $(A_i)_{i=0}^{n}$ est un repère affine de E, pour tout $B \in \mathcal{E}$, il existe un unique (à multiplication par un scalaire non nul près) $(\lambda_i)_{i=0}^{n} \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\sum \lambda_i \neq 0$ tel que : $B = \text{bar}(A_i, \lambda_i)$

Def 24 : Les $(\lambda_i)_{i=0}^{n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ sont appelés coordonnées barycentriques de B dans $\mathcal{E}$ (muni du repère affine $(A_i)_{i=0}^{n}$)

App 25 : calcul des coordonnées barycentriques de l'orthocentre du triangle

Def 26 : On appelle aire algébrique du triangle orienté ABC la quantité $\frac{1}{2}[A,B,C] = \frac{1}{2}\det(\vec{AB}, \vec{AC})$

Prop 27 : $(n=2)$ A, B, C repère affine de $\mathcal{E}$, $M \in \mathcal{E}$. $([M,B,C], [A,M,C], [A,B,M])$ est l'unique système de coordonnées barycentriques de M vérifiant : $[M,B,C]+[A,M,C]+[A,B,M] = [A,B,C]$

4) Application de la notion de barycentre

Cadre : $\mathcal{E}$ plan affine $(n=2)$ muni d'un repère affine (A, B, C).

Prop 28 : $M, M', M'' \in \mathcal{E}$, de coordonnées barycentriques respectives (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ et $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$. Alors M, M' et M'' sont alignés ssi $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = 0$

Prop 29 : Trois droites affines $\mathcal{D}, \mathcal{D}', \mathcal{D}''$ de $\mathcal{E}$ d'équation barycentriques relatives à (A,B,C) étant respectivement : $aX+bY+cZ=0$, $a'X+b'Y+c'Z=0$, $a''X+b''Y+c''Z=0$, sont concourantes ou parallèles ssi $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$

Prop 30 : $P = \text{bar}((B,\beta),(C,\gamma))$, $Q = \text{bar}((C,\gamma'),(A,\alpha'))$, $R = \text{bar}((A,\alpha''),(B,\beta''))$

Les points P, Q, R sont alignés ssi on a : $\alpha'\beta''\gamma + \alpha''\beta\gamma' = 0$, et les droites (AP), (BQ), (QR) sont concourantes ssi on a $\alpha'\beta''\gamma - \alpha''\beta\gamma' = 0$

App 31 : Calcul des coordonnées des points remarquables du triangle :
* centre de gravité (intersection des médianes)
* centre du cercle inscrit / circonscrit

II Convexité

1) Enveloppe convexe

Def 32 : Une partie C de V est dite convexe si pour tous $x, y \in C$, $[x,y] = \{\lambda x + (1-\lambda)y,\ \lambda \in [0,1]\} \subset C$.

Def 33 : Une partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}$ est dite convexe si $\forall M \in \mathcal{E}$, $\{\vec{MX},\ X \in \mathcal{C}\}$ est une partie convexe de V

Def 34 : Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$, $\mathcal{A} \neq \emptyset$, l'enveloppe convexe de $\mathcal{A}$ est le plus petit convexe de $\mathcal{E}$ contenant $\mathcal{A}$, on le note $\text{Conv}(\mathcal{A})$

Ex 35 : $\mathcal{E} = M_n(\mathbb{R})$, $\text{Conv}(O_n(\mathbb{R})) = \overline{B}_{\|\cdot\|_2}(0, 1)$ (boule unité fermée de $M_n(\mathbb{R})$ pour $\|\cdot\|_2$)

Th 36 (Radon, admis)
Tout ensemble $\mathcal{A} = \{A_0, \dots, A_d\} \subset \mathbb{R}^d$ admet une partition $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ telle que : $\text{Conv}(\mathcal{A}_1) \cap \text{Conv}(\mathcal{A}_2) = \emptyset$

DEV 1

Th 37 : Théorème de Helly
Soit $X_1, \dots, X_n$ une famille de n convexes de $\mathbb{R}^d$ avec $n \geq d+2$ telle que $\left(\forall I \subset [\![1, n]\!] \left(\# I = d+1\right) \Rightarrow \left(\bigcap_{i \in I} X_i \neq \emptyset\right)\right)$
Alors $\bigcap_{i=1}^{n} X_i \neq \emptyset$

Thm 38 : Carathéodory :
Si $A \subset \mathcal{E}$, tout point de $\text{Conv}(A)$ est combinaison convexe d'au plus $n+1$ points de A

App 39 : L'enveloppe convexe d'une partie compacte de $\mathcal{E}$ est compacte.

Prop 40 : tout sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$. DEV 2

2) Points extrémaux

Def 41 : Un point extrémal du convexe $\mathcal{C}$ est un point $A \in \mathcal{C}$ tel que $\mathcal{C} \setminus \{A\}$ est convexe, ou de façon équivalente, qui n'est pas à l'intérieur d'un segment contenu dans $\mathcal{C}$.

Ex 42 : les points extrémaux de l'ensemble des mesures de probabilité sur $[0,1]$ sont les masses de Dirac

Ex 43 : Les points extrémaux de la boule unité de $M_n(\mathbb{R})$ sont les éléments de $O_n(\mathbb{R})$ (avec la norme euclidienne subordonnée)

Def 44 : Un hyperplan affine $\mathcal{H} \subset E$ est dit hyperplan d'appui à $A \subset E$ en $x \in A$ si $x \in H \cap A$ et A est inclus dans un des demi-espaces délimités par H.

Def 45 : Un point x d'un convexe $\mathcal{C} \subset E$ est dit exposé s'il existe un hyperplan d'appui $\mathcal{H}$ de $\mathcal{C}$ vérifiant $\mathcal{H} \cap \mathcal{C} = \{x\}$.

Prop 46 : Tout point exposé est extrémal.

Thm 47 : Si $\mathcal{C} \subset E$ est un convexe fermé, alors l'adhérence de ses points exposés contient ses points extrémaux.

Thm 48 : Krein-Milman
Tout convexe compact de E est enveloppe convexe de ses points extrémaux.

3) Application de la convexité

i) Inégalités de convexité

Prop 49 : Si $a, b \geq 0$, $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors
$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \quad \text{(Inégalité de Young)}$$

App 50 : Inégalité de Hölder, et $L^p([0,1]) \subset L^q([0,1])$ si $p \geq q$.

Prop 51 : $$e^{tx} \leq \frac{1-x}{2} e^{-t} + \frac{1+x}{2} e^{t}, \ \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in [-1,1]$$

App 52 : Inégalité de Hoeffding :
(X_n) suite de v.a. réelles, indépendantes et centrées t.q. $\forall n \in \mathbb{N}^*, |X_n| \leq c_n$ p.s. où $c_n > 0$. Alors $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(| \ \ | \geq \varepsilon) \leq 2\exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{2\sum_{i=1}^{n} c_i^2}\right)$

ii) Théorème de Hahn-Banach

Thm 53 : A, B deux convexes disjoints non vides de $\mathbb{R}^N$
a) Si A est fermé et B compact, il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens strict
b) Si A est ouvert, il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens large

C-ex 54 a) Faux si A et B sont seulement fermés (voir annexe)

Def 55 : U ouvert de $\mathbb{C}$, M partie de U
$$\hat{M} := \{z \in U, |f(z)| \leq \sup_M |f|, \forall f \in \mathcal{O}(U)\}$$
$\hat{M}$ est appelée enveloppe holomorphiquement convexe de M.

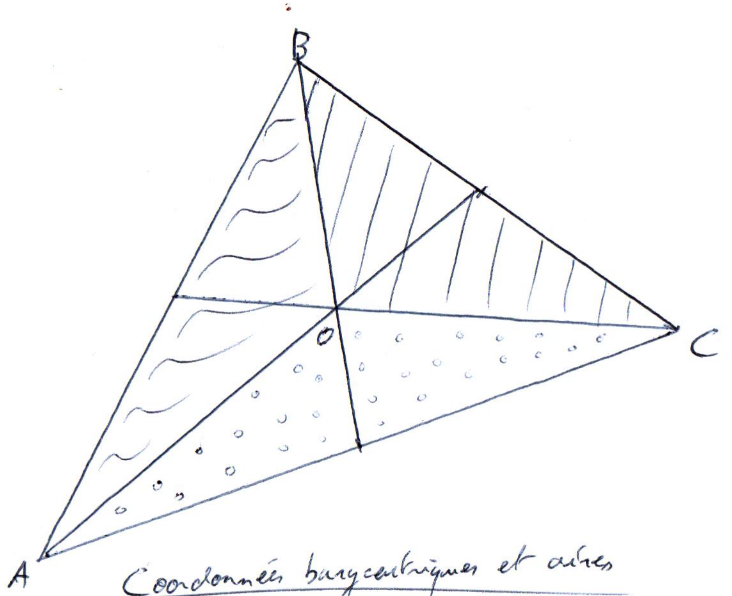
Prop 56 : $\hat{M} \subset \mathrm{Conv}(M)$.

ii) En optimisation

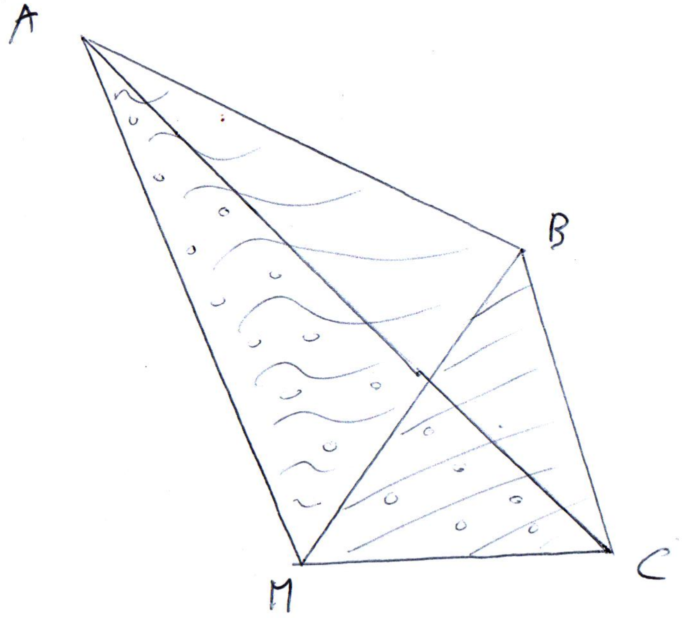
Th 57 : U partie convexe de $\mathbb{R}^n$.
a) Si $J : U \to \mathbb{R}$ ~~fonct~~ fonctionnelle convexe admet un minimum local en un point de U, ce minimum est global
b) Si de plus J est strictement convexe, ce minimum est unique
c) Si J est dérivable sur U, ce minimum est caractérisé par $J'(u) = 0$

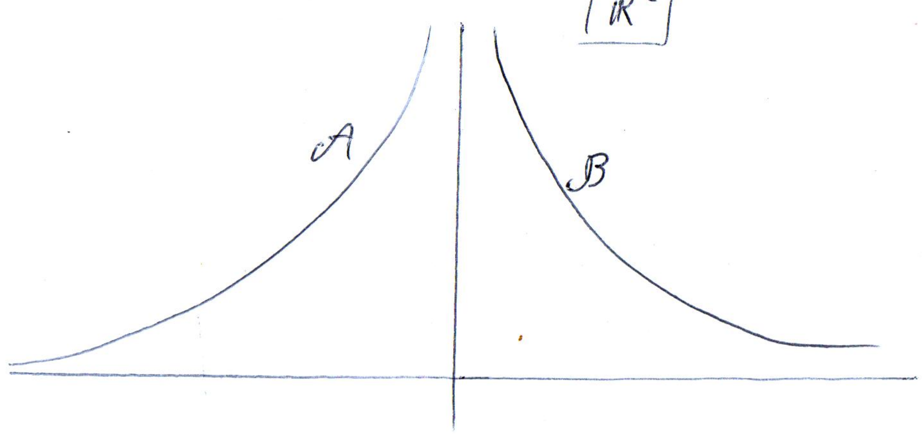
Appli 58 : Résolution d'un système linéaire $AX = B$ en minimisant la fonctionnelle convexe $f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$, où A est symétrique définie positive.

Ex 59 : algorithme du gradient à pas optimal.

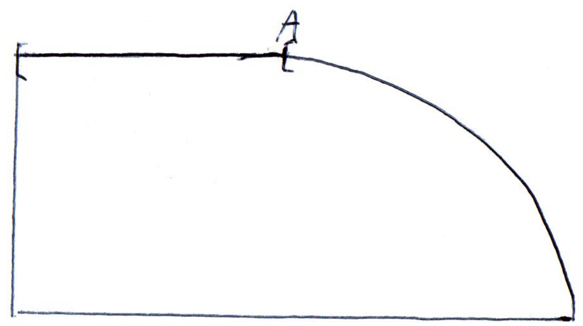


Coordonnées barycentriques et aires algébriques





C-ex 54



Contre exemple à Prop 46