181. Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications

Cadre : $\mathcal{E}$ espace affine de direction E, $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

I- Barycentres

1- Définitions et premières propriétés

Déf 1 : Un système de points pondérés est un ensemble $\{(A_i,\mu_i), i\in I\}$ avec I fini, avec $\forall i\in I$, $A_i\in\mathcal{E}$, $\mu_i\in\mathbb{R}$.

Déf 2 : La fonction de Leibniz associée à un système de points pondérés $\{(A_i,\mu_i), i\in[\![0,n]\!]\}$ est l'application $\varphi : M\in\mathcal{E}\mapsto \sum_{i=0}^{n}\mu_i\overrightarrow{A_iM}$.

Prop 3 : Si $\sum\mu_i=0$, alors φ est constante. Sinon φ est bijective

Déf 4 : Soit $\{(A_i,\mu_i), i\in[\![0,n]\!]\}$ système de points pondérés avec $\sum_{i=0}^{n}\mu_i\neq 0$. Le barycentre de ce système est l'unique point G tel que $\varphi(G)=\vec{0}$. Il est noté $\mathrm{bar}((A_0,\mu_0),\dots,(A_n,\mu_n))$.

Prop 5 : Soit $G\in\mathcal{E}$. $G=\mathrm{bar}((A_i,\mu_i)) \iff \sum_{i=0}^{n}\mu_i\overrightarrow{GA_i}=\vec{0}$
$\iff \exists O\in\mathcal{E},\ \sum_{i=0}^{n}\mu_i\overrightarrow{OG}=\sum_{i=0}^{n}\mu_i\overrightarrow{OA_i}$
$\iff \forall O\in\mathcal{E},\ \sum_{i=0}^{n}\mu_i\overrightarrow{OG}=\sum_{i=0}^{n}\mu_i\overrightarrow{OA_i}$.

On note parfois $G=\sum_{i=0}^{n}\mu_iA_i$

Rmq 6 : Soient $A,B\in\mathcal{E}$. L'ensemble des barycentres suivant $\{\mathrm{bar}((A,\mu),(B,\lambda)), \mu,\lambda\in\mathbb{R}\}=(AB)$ est la droite passant par A et B.

Déf 7 : L'isobarycentre de $A_0,\dots,A_n$ est $\mathrm{bar}((A_0,1),\dots,(A_n,1))$.

Ex 8 : $\mathrm{bar}((A,1),(B,1))$ est le milieu de $[AB]\overset{\text{déf}}{=}\{\mathrm{bar}((A,\mu),(B,1-\mu)),\mu\in[0,1]\}$.

Prop 9 : Posons $G=\mathrm{bar}((A_0,\mu_0),\dots,(A_n,\mu_n))$.
(i) Homogénéité : $\forall\alpha\in\mathbb{R}^*$, $G=\mathrm{bar}((A_0,\alpha\mu_0),\dots,(A_n,\alpha\mu_n))$
(ii) Commutativité : $\forall\sigma\in\mathfrak{S}_{n+1}$, $G=\mathrm{bar}((A_{\sigma(0)},\mu_{\sigma(0)}),\dots,(A_{\sigma(n)},\mu_{\sigma(n)}))$.
(iii) Associativité : Soit $J\subset\{0,\dots,n\}$ tel que $\sum_{i\in J}\mu_i,\ \sum_{i\in J^c}\mu_i\neq 0$. Si $G_J=\mathrm{bar}((A_i,\mu_i)_{i\in J})$, $G_{J^c}=\mathrm{bar}((A_i,\mu_i)_{i\in J^c})$, alors $G=\mathrm{bar}((G_J,\sum_{i\in J}\mu_i),(G_{J^c},\sum_{i\in J^c}\mu_i))$.

Ex 10 : Dans un triangle, les médianes se coupent en l'isobarycentre. Dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leurs milieux, isobarycentre des sommets

Thm 11 : Soit P_0 polygone à n sommets. La suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $P_{k+1,i}=\frac{P_{k,i}+P_{k,i+1}}{2}$, $k\geq 0$ et $i\in\{1,\dots,n\}$, converge géométriquement vers l'isobarycentre de P_0 : $g=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}P_{0,i}$ $\boxed{\text{DEV 1}}$

2- Sous-espaces affines et barycentres

Thm 12 : Le sous-espace affine engendré par une partie $A\subset\mathcal{E}$ est l'ensemble des barycentres des points de A. Il est noté $\mathrm{Aff}(A)$.

Ex 13 : Soient A,B,C non alignés. $\mathrm{Aff}(\{A,B,C\})$ est le plan passant par ces trois points.

Thm 14 : Une partie non vide de $\mathcal{E}$ est un sous-espace affine si et seulement si elle est stable par barycentres.

Rmq 15 : Par associativité, il suffit d'être stable par barycentres de deux points.

3- Systèmes affinement libres - Repérage

Thm 16 : Soient $A_0,\dots,A_n\in\mathcal{E}$. Il y a équivalence entre :
(i) $\forall j\in\{0,\dots,n\}$, $\{\overrightarrow{A_jA_i}\}_{i\neq j}$ est une famille libre.
(ii) $\exists j\in\{0,\dots,n\}$, $\{\overrightarrow{A_jA_i}\}_{i\neq j}$ est une famille libre
(iii) $\forall j\in\{0,\dots,n\}$, $A_j\notin\mathrm{Aff}(\{A_i\}_{i\neq j})$.

Déf 17 : Une telle famille $\{A_0,\dots,A_n\}$ est dite affinement libre. Si $\dim E=n$, une famille affinement libre de $n+1$ points est un repère affine.

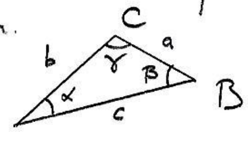
Déf 18 : Soit $R=\{A_0,\dots,A_n\}$ repère affine de $\mathcal{E}$. Soit $M\in\mathcal{E}$. Un système de coordonnées barycentriques de M est une famille $\{\mu_0,\dots,\mu_n\}$ telle que $M=\mathrm{bar}((A_0,\mu_0),\dots,(A_n,\mu_n))$
Le système est dit normalisé si $\sum_{i=0}^{n}\mu_i=1$.

Thm 19 : Deux systèmes de coordonnées barycentriques d'un même point sont proportionnels. En particulier, le système normalisé est unique.

Rmq 20 : Soit $A_0 = bar((A_1,1),(A_2,1))$. $A_0 = bar((A_0,1),(A_1,0),(A_2,0)) = bar((A_0,0),(A_1,1),(A_2,1))$

mais $(0,1,1)$ et $(1,0,0)$ ne sont pas proportionnels.

Ex 21 : Soient A, B, C non alignés. Notons G l'isobarycentre, H l'orthocentre, I (resp. J) le centre du cercle inscrit (resp. circonscrit) du triangle. Soit $O \in \mathcal{E}$, supposé euclidien.



$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{a+b+c}(a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC})$$

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma}(\tan\alpha\,\overrightarrow{OA} + \tan\beta\,\overrightarrow{OB} + \tan\gamma\,\overrightarrow{OC})$$

$$\overrightarrow{OJ} = \frac{1}{\sin(2\alpha) + \sin(2\beta) + \sin(2\gamma)}(\sin(2\alpha)\overrightarrow{OA} + \sin(2\beta)\overrightarrow{OB} + \sin(2\gamma)\overrightarrow{OC})$$

4. Applications

Thm 22 : $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ est affine $\iff \forall (A_i, \mu_i),\ f(bar(A_i,\mu_i)) = bar(f(A_i),\mu_i)$.

Ex 23 : $f : M \mapsto M + \vec{a}$ est une translation de vecteur $\vec{a}$.

$f_{A,\mu} : M \mapsto A + \mu\overrightarrow{AM}$ est une homothétie de centre A, de rapport μ.

Thm 24 (Thalès) : Soient OAA', OBB' non aplatis, $A \in (OB)$, $A' \in (OB')$.
Si (AA') et (BB') sont parallèles, alors $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}}$

Thm 25 (Ménélaüs) : Soient ABC non aplati, $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, $P \in (BC)$ distincts des sommets. M, N, P alignés $\iff \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}\,\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}\,\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1$.

Thm 26 (Céva) : Avec les mêmes notations :
$(CM), (AP), (BN)$ concourantes ou parallèles $\iff \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = -1$.

App 27 : (Courbes de Bézier) Pour $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{R}^2$, on définit la courbe $\{ \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} P_i,\ u \in [0,1] \}$ passant par P_0, P_n et influencée par les points $P_1, \dots, P_{n-1}$. La courbe est tangente à $\overrightarrow{P_0P_1}$ et $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$.

II. Convexité

1. Définitions et premiers exemples

Déf 28 : Une combinaison convexe est un barycentre $bar((A_0,\mu_0),\dots,(A_n,\mu_n))$ tel que $\forall i \in \{0,\dots,n\}$, $\mu_i \geq 0$ et $\sum_{i=0}^{n} \mu_i = 1$.

Rmq 29 : Le segment $[AB]$ est l'ensemble des combinaisons convexes de A et B.

Déf 30 : Une partie $A \subset \mathcal{E}$ est convexe si $\forall M, N \in A$, $[MN] \subset A$.

Prop 31 :
- Les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.
- Toute intersection de convexes est convexe.
- Une partie est convexe si et seulement si elle est stable par combinaisons convexes
- Si $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ est affine, $B \subset \mathcal{E}$, $C \subset \mathcal{E}'$ convexes, alors $f(B)$ et $f^{-1}(C)$ sont convexes.
- Si A et B sont des convexes de $\mathcal{E}$, alors $A+B$, $A \times B$ sont convexes.

Prop 32 : Dans $\mathcal{E} = E = \mathbb{R}^n$, l'adhérence d'un convexe est convexe.

Ex 33 : Un sous-espace affine, un segment, une droite de $\mathcal{E}$ sont convexes.

2. Enveloppe convexe

Déf 34 : L'enveloppe convexe d'une partie $A \subset \mathcal{E}$ est l'intersection de tous les convexes contenant A, notée $Cv(A)$.

Prop 35 : $Cv(A)$ est l'ensemble des combinaisons convexes de A.

Prop 36 : Dans $\mathcal{E} = E = \mathbb{R}^n$, soit $A \subset \mathcal{E}$.
- L'intersection des convexes fermés de $\mathcal{E}$ contenant A est $\overline{Cv(A)}$
- Si A est convexe compacte, alors $A = Cv(\partial A)$
- Si A est ouverte, alors $Cv(A)$ est ouverte.

Ex 37 : $A = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2,\ xy \geq 1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
Mais $Cv(A) = \{(0,0)\} \cup (\mathbb{R}_+^*)^2$ n'est pas fermée.

Thm 38 : (Lucas) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant.
Toute racine de P' appartient à l'enveloppe convexe des racines de P.

Prop 39 : $Cv(A \times B) = Cv(A) \times Cv(B)$ et $Cv(A+B) = Cv(A) + Cv(B)$.

Thm 40 : $Cv(O_n(\mathbb{R}))$ est la boule unité fermée de $M_n(\mathbb{R})$ pour la norme $\|\ \|_2$.

Thm 41 (Carathéodory) : Soit $A \subset \mathcal{E}$. Tout élément de $Cv(A)$ s'écrit comme combinaison convexe de k points de A, avec $k \leq 1 + \dim \mathcal{E}$.

Cor 42 : Dans $E = \mathbb{R}^n$: $\boxed{\text{DEV 2}}$

(i) A compacte $\Rightarrow Cv(A)$ compacte

(ii) A bornée $\Rightarrow Cv(A)$ bornée et $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(Cv(A))$

3- Points extrémaux

Déf 43 : Soit A convexe de $\mathcal{E}$. Un point $M \in A$ est dit extrémal si $\forall \mu \in [0,1], \forall P, Q \in A, [M = \operatorname{bar}((P, 1-\mu), (Q, \mu))] \Rightarrow M = P$ ou $M = Q$.

Prop 44 : Soient A convexe de $\mathcal{E}$, $M \in A$.
Le point M est extrémal si et seulement si $A \setminus \{M\}$ est convexe.

Ex 45 : · Les points extrémaux d'un solide platonicien sont ses sommets.
· Notons $\mathcal{B}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_1 \leq 1\}$, $\mathcal{B}_\infty = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_\infty \leq 1\}$.
Les points extrémaux de $\mathcal{B}_1$ (resp $\mathcal{B}_\infty$) sont $\{\pm e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ (resp $\{(\pm 1, \dots, \pm 1)\}$)

Prop 46 : Les points extrémaux de l'ensemble des matrices bistochastiques sont les matrices de permutations.

III- Applications de la notion de convexité

1- Théorèmes de séparation (E evn de dimension quelconque).

Déf 47 : Soient $A, B \subset E$, f forme linéaire non nulle sur E et $\alpha \in \mathbb{R}$.
L'hyperplan d'équation $\{f = \alpha\}$ sépare A et B au sens large (resp. strict) si $\forall x \in A, f(x) \leq \alpha$ et $\forall x \in B, f(x) \geq \alpha$
(resp. $\exists \varepsilon > 0, \forall x \in A, f(x) \leq \alpha - \varepsilon$ et $\forall x \in B, f(x) \geq \alpha + \varepsilon$).

Thm 48 (Hahn-Banach) Soient $A, B \subset E$ convexes non vides disjoints.
(i) Si A est ouvert, alors il existe un hyperplan séparant A et B au sens large.
(ii) Si A et B sont ouverts, alors il existe un hyperplan les séparant au sens strict.
(iii) Si A est compact, B fermé, alors il existe un hyperplan les séparant au sens strict.
(iv) Si A et B sont fermés, alors il existe un hyperplan les séparant au sens large.

Ex 49 : $A = \mathbb{R} \times \{0\}$ et $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2, xy \geq 1\}$ sont convexes fermés disjoints.
Il n'existe pas d'hyperplan séparant A et B au sens strict.

Thm 50 (Krein-Milman) : Soit $A \subset E$ convexe compact non vide.
A est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux

2- Projection sur un convexe fermé (H espace de Hilbert).

Thm 51 : Soit $C \subset H$ un convexe fermé non vide.
$\forall x \in H, \exists! \, p_C(x) \in C, \|x - p_C(x)\| = \inf_{y \in C} \|x - y\|$
Ce point est caractérisé par : $p_C(x) \in C$ et $\forall y \in C, \operatorname{Re} \langle x - p_C(x), y - p_C(x) \rangle \leq 0$.

Prop 52. L'application p_C est 1-lipschitzienne.

Cor 53 : Soit F sous-espace vectoriel de H. $H = \overline{F} \oplus F^\perp$.
En particulier, F est dense dans H si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.

Cor 54 : L'application $\begin{array}{l} H \to H' \\ y \mapsto \langle \cdot, y \rangle \end{array}$ est une isométrie surjective.

Prop 55 : Soit $D \subset H$. Pour $f \in H'$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $H(f, \alpha) = \{x \in H, f(x) \leq \alpha\}$.
$\overline{Cv(D)} = \bigcap_{D \subset H(f,\alpha)} H(f, \alpha)$.

Cor 56 : C est convexe fermé si et seulement si C est l'intersection des demi-espaces le contenant.

3- Fonctions convexes et optimisation

Prop 57 : Soient C un convexe, $f : C \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.
Les ensembles de niveau de f $N_\alpha = \{x \in C, f(x) \leq \alpha\}$ sont convexes.

Prop 58 : Une application $f : C \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si son épigraphe $\{(x,y) \in C \times \mathbb{R}, f(x) \leq y\}$ est convexe.

Cor 59 : Un sup de fonctions convexes bornées sur C est convexe sur C.

Thm 60 : Soient C convexe, $f : C \to \mathbb{R}$ strictement convexe.
Il existe au plus un point de C minimisant f sur C