180 Coniques. Applications.

<u>Cadre</u> : on se place dans un espace affine réel $\mathcal{E}$ de direction un espace vectoriel E

I Généralités sur les coniques

1) Définitions

[AUD] <u>Def 1</u> On appelle quadrique affine la classe d'équivalence d'un polynôme du second degré noté $f : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ sous la relation $f \sim g \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid g = \lambda f$.

On appellera image de la quadrique l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $f(M) = 0$. On notera $C = \{M \in \mathcal{E},\ f(M) = 0\}$

[AUD] <u>Rmq 2</u> Une quadrique n'est pas entièrement déterminée par son image

<u>Ex 3</u> $f : x^2+y^2+1$ et $g : x^2+1$ ont même image vide mais ne sont pas pour autant égales

<u>Def 4</u> on appelle conique toute quadrique plane

<u>Ex 5</u> x^2+y^2-1 est une conique

<u>Rmq 6</u> en général, on définit un polynôme du second degré dans un repère de l'espace affine de la manière suivante $f((x_1, \dots, x_n)) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c$

on peut également l'écrire, pour un point donné O de l'espace affine $\forall M \in \mathcal{E},\ f(M) = q(\overrightarrow{OM}) + L_O(\overrightarrow{OM}) + c_O$ où q est une forme quadratique non nulle ne dépendant pas de O, L_O est une forme linéaire et c_O une constante

[AUD] <u>Def 7</u> Soit f une conique comme précédemment, on appelle forme quadratique homogénéisée la forme quadratique Q de $E \times \mathbb{R}$ définie par

$$Q(u,z) = q(u) + L(u)z + cz^2$$

<u>Ex 8</u> $f_1 : x^2+y^2-1 \longrightarrow Q_1(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$

$f_2 : x^2-1 \longrightarrow Q_2(x,y,z) = x^2-z^2$

[AUD] <u>Def 9</u> Une conique est dite propre si sa forme quadratique homogénéisée est non dégénérée.

<u>Ex 10</u> En reprenant Q_1 et Q_2 de l'exemple précédent on obtient que f_1 est propre alors que f_2 ne l'est pas

2) Réduction de l'équation

<u>Def 11</u> Soit f une conique telle que $\forall M \in \mathcal{E}$, $f(M) = q(\overrightarrow{OM}) + L_O(\overrightarrow{OM}) + c_O$ pour $O \in \mathcal{E}$ donné. On dit qu'un point $\Omega \in \mathcal{E}$ est un centre pour la conique si $L_\Omega = 0$ [AUD]

Si le centre est unique, alors on dira que la conique est à centre

<u>Prop 12</u> On peut définir le centre d'une conique comme un centre de symétrie pour la conique [LAD]

<u>Thm 13</u> Pour qu'une conique soit à centre, il faut et il suffit que la partie quadratique d'un des polynômes qui la définissent soit non dégénérée. [AUD]

<u>Rmq 14</u> Les notions de coniques à centre et de coniques propres sont indépendantes.

<u>Ex 15</u>
- x^2+y^2-1 est propre et à centre
- x^2-y^2 est à centre mais n'est pas propre.
- $x-y^2$ est propre mais n'a pas de centre.

<u>Thm 16 Classification affine des coniques</u> [LAD]

Dans un repère adéquat, l'équation d'une conique du plan affine réel est de l'une des neuf formes suivantes:

propre $\{X^2+Y^2=1$ (ellipse), $X^2-Y^2=1$ (hyperbole), $Y=X^2$ (parabole)

droite(s) $\{X^2-Y^2=0,\ X^2=1,\ X^2=0$

imaginaire $\{X^2+Y^2=-1,\ X^2=-1,\ X^2+Y^2=0$

<u>Def 17</u> Deux coniques affines sont dites de même type si leur équation réduite est la même. [AUD]

<u>Rq 18</u> Si la conique est propre, on peut déterminer son type via la signature de sa forme quadratique q.

[AUD] Corollaire 19 Soient C, C' deux coniques affines. Pour qu'il existe une transformation affine envoyant C sur C', il faut et il suffit qu'elles aient le même type.
Rmq 20 On souhaiterait rendre plus précise la classification. Pour cela on se place dans un espace affine euclidien.
[LAD] Thm 21 Classification affine euclidienne des coniques.
Dans un certain repère orthonormé, l'équation d'une conique affine euclidienne est de l'une des neuf formes suivantes :

propres $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ (ellipse)}, \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ (hyperbole)} \\ y^2=2px \text{ (parabole)} \end{cases}$

droites $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0, \ y^2=k^2, \ y^2=0 \end{cases}$

imaginaires $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1, \ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0, \ y^2=-k^2 \end{cases}$

Rmq 22 Cette classification se fait à isométrie près. Deux coniques affines euclidiennes sont isométriques si et seulement si elles ont même type et a, b et p coïncident.

II Les coniques propres dans le plan affine euclidien.
On se place dans le plan affine euclidien réel P muni d'un repère orthonormé.

1) Description géométrique des coniques propres

[LAD] Def 23 (Définition monofocale)
Soit D une droite du plan P, $F \in P \setminus D$, $e \in \mathbb{R}^+$. On appelle conique propre de foyer F, de directrice D et d'excentricité e l'ensemble $C=\{M \in P, d(M,F)=e\,d(M,D)\}$
[NGU] Def 24 La droite perpendiculaire à la directrice D passant par F est un axe de symétrie pour la conique, appelé axe focal.
[NGU] Def 25 On appelle paramètre de la conique l'élément p défini par $0<p=e\,d(F,D)$.
[NGU] Def 26 On appelle sommet de la conique le ou les points d'intersections de la conique avec ses axes de symétrie.
Ex 27 L'hyperbole, l'ellipse et la parabole ont respectivement deux, quatre et un sommet.
Rmq 28 Le centre d'une conique, s'il existe est le milieu de deux sommets situés sur le même axe de symétrie.

Thm / Def 29 Toute conique propre non vide est l'ensemble [LAD] des centres des cercles passant par un point fixe F et tangents à une courbe fixe Σ appelée courbe directrice qui est un cercle dans le cas de l'ellipse et de l'hyperbole, et une droite dans le cas de la parabole.

2) Ellipse non circulaires $0<e<1$ Fig n°1

Def 30 On appelle ellipse toute courbe dont l'équation dans un repère orthonormé d'origine son centre Ω est :
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \ a, b \in \mathbb{R}_+^*, \ a \geq b$$ où a est le demi grand axe et b le demi petit axe.
App 31 Tracé de l'ellipse à partir de $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$
Prop 32 L'ellipse $\mathcal{E}$ admet pour paramétrisation [NGU]
$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$
Rmq 33 Par symétrie centrale, $\mathcal{E}$ possède deux foyers et deux directrices.
Prop 34 (définition bifocale) [AUD]
Soient F, F' deux points distincts du plan, $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $2a > FF'$. L'ensemble des points $M \in P$ vérifiant $MF+MF'=2a$ est l'ellipse de foyers F et F', de demi grand axe a et de centre le milieu de $[FF']$
App 35 construction du jardinier [AUD]
Tracé de l'ellipse avec deux points, un fil de longueur $2a$ et un crayon
Prop 36 L'aire de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ est πab.
App 37 Lois de Kepler

3) Hyperbole $e>1$ Fig n°3

Def 38 On appelle hyperbole $\mathcal{H}$ toute courbe d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ dans un certain repère orthonormé
Rmq 39 Construction de l'hyperbole $\mathcal{H}$ à partir de $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$
Prop 40 L'hyperbole $\mathcal{H}$ admet pour paramétrisation [LAD]
$\begin{cases} x=\pm a\,\mathrm{ch}\,t \\ y=b\,\mathrm{sh}\,t \end{cases}$

[AUD] Prop 41 L'hyperbole de foyers F et F' de demi grand axe est l'ensemble des points $M \in P$ tels que $|MF - MF'| = 2a$

Prop 42 L'hyperbole a deux asymptotes $y = \pm \frac{b}{a} x$

Rmq 43 L'hyperbole est dite équilatère lorsque ses asymptotes sont perpendiculaires donc pour $a=b$ ou encore pour $e=\sqrt{2}$

4) Parabole $e=1$ Fig n°2

Def 44 On appelle toute courbe dont une équation cartésienne dans un repère orthonormé centré en son sommet est de la forme $y^2=2px$

Rmq 45 On peut construire la parabole avec $y=\pm\sqrt{2px}$

[NGU] Prop 46 La parabole admet pour paramétrisation

$$\begin{cases} x = 2pt^2 \\ y = 2pt \end{cases}$$

[FGN3] Thm 47 On considère la parabole d'équation $y^2=2px$, de foyer $F(\frac{p}{2},0)$

dvlpt 1 { 1) L'ensemble des centres des triangles équilatéraux inscrits dans la parabole décrivent une nouvelle parabole.

dvlpt 2 { 2) Une droite Δ passant par le foyer (différente de l'axe focal) coupe la parabole en A et B. L'ensemble des centres des cercles circonscrits aux triangles OAB décrivent une autre parabole.

5) Caractérisation similaire / différentes

[NGU] Thm 48 Dans un repère dont l'origine est le centre ou le sommet de la conique, on définit :

	ellipse	hyperbole	parabole
c	$c=\sqrt{a^2-b^2}$	$c=\sqrt{a^2+b^2}$	$\emptyset$
sommet(s)	$S_1(-a,0)$, $S_2(a,0)$, $T_1(0,-b)$, $T_2(0,b)$	$S_1(-a,0)$ $S_2(a,0)$	$O(0,0)$
foyer(s)	$F(-c,0)$, $F'(c,0)$		$F(\frac{p}{2},0)$
directrice(s)	$D_1 : x = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c}$ $D_2 : x = \frac{-a}{e} = \frac{-a^2}{c}$		$D : x = -\frac{p}{2}$
excentricité	$e=\frac{c}{a}<1$	$e=\frac{c}{a}>1$	$e=1$
p	$p=e(\frac{a^2}{c}-c)$	$p=e(c-\frac{a^2}{c})$	$p>0$

III Propriétés géométriques

1) Intersection et coniques propres

Prop 49 Soit $A \in P$, $\vec{u} \in E$, D la droite passant par A dirigée par $\vec{u}$ [AUD]
Au point A on peut écrire une conique comme suit : $q(\vec{AM}) + L_A(\vec{AM}) + c_A = 0$. Soit $\Delta = L_A(\vec{u})^2 - 4c_A q(\vec{u})$
- si $\Delta > 0$ alors D et la conique ont deux points d'intersection
- si $\Delta = 0$ on a un point (double) d'intersection.
- si $\Delta < 0$ l'équation n'a pas de solutions réelles, il n'y a pas de point d'intersection réel.

Thm 50 (Bézout) Deux coniques propres d'un plan affine réel euclidien s'intersectent en au plus quatre points.

2) Tangentes et propriétés tangentielles.

Thm 51 Soit $\mathcal{C}$ une conique d'équation $ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$. Soit $M\binom{x_0}{y_0} \in \mathcal{C}$. L'équation de la tangente en M_0 de $\mathcal{C}$ a pour équation [LAD]
$$(ax_0+by_0+d)x+(bx_0+cy_0+e)y+(dx_0+ey_0+f)=0$$

Ex 52 La droite d'équation $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$ est l'équation de la tangente en $M_0\binom{x_0}{y_0}$ de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ [NGU]

Thm 53 La tangente au point M d'une ellipse (resp. d'une hyperbole) est la bissectrice extérieure (resp intérieure) de l'angle $\widehat{FMF'}$. [LAD]
La tangente en M à la parabole P est la médiatrice de [FK] avec K le projeté de M sur D.

App 54 en optique [LAD]
- Dans une ellipse tout rayon passant par un foyer se réfléchit sur l'autre foyer Fig 1
- Dans une parabole tout rayon parallèle à l'axe focal se réfléchit vers le foyer. Fig 2

Thm 55 Soit P un point extérieur à $\mathcal{C}$ par lequel passe deux tangentes à $\mathcal{C}$ en T_1, T_2, alors les couples de droites $((PT_1),(PT_2))$ et $((PF),(PF'))$ ont même bissectrice, c'est à dire $\widehat{T_2PF} = \widehat{F'PT_1}$ $[\pi]$ [LAD] Fig 5

App 56 (Ellipse de Steiner) Soit $F \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré 3 : $F = (X-r_1)(X-r_2)(X-r_3)$ tels que M_i d'affixe r_i ne soient pas alignés. Alors les racines de F' sont les affixes des foyers d'une ellipse tangente avec les côtés de $M_1M_2M_3$ en leur milieu [MER] Fig 4 dvlpt 3

Fig n°1 ellipse $0<e<1$

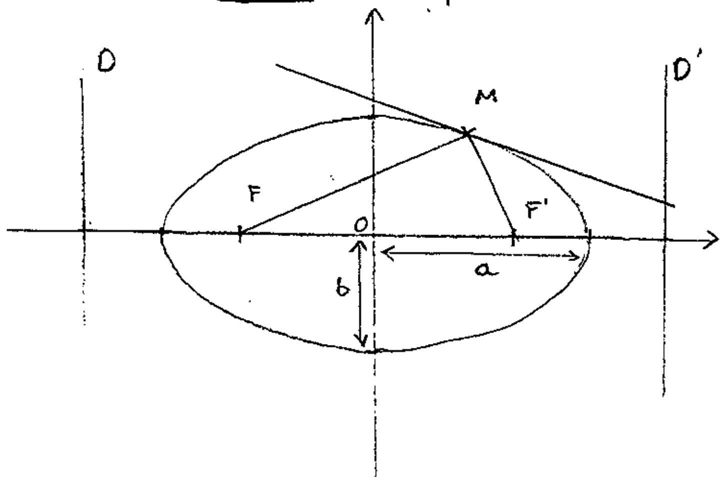


Fig n°2 parabole $e=1$

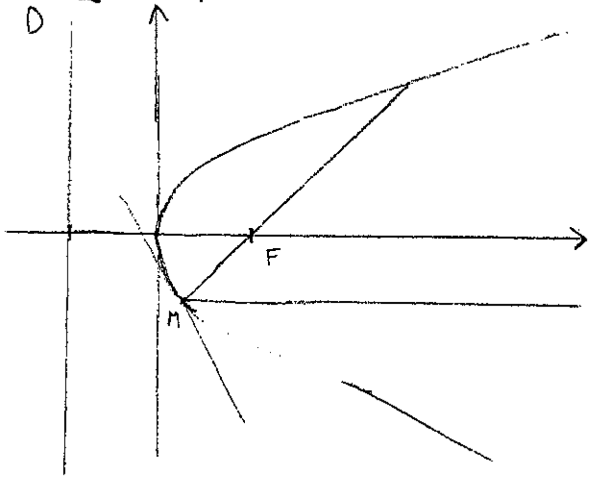


Fig n°3 hyperbole $e>1$

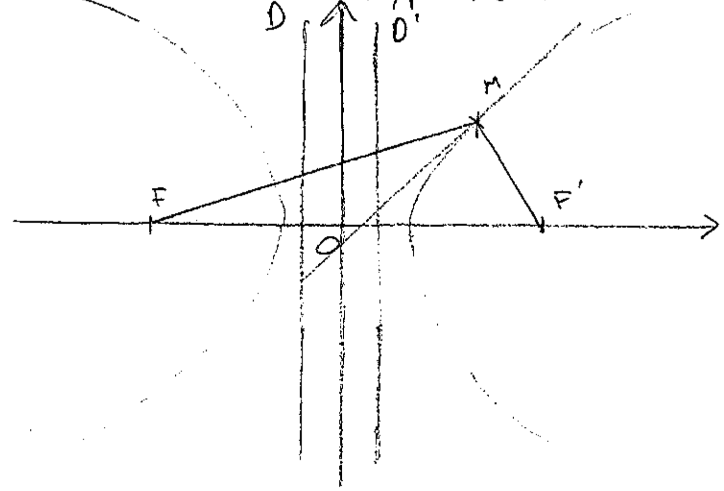


Fig n°5 Thm 55

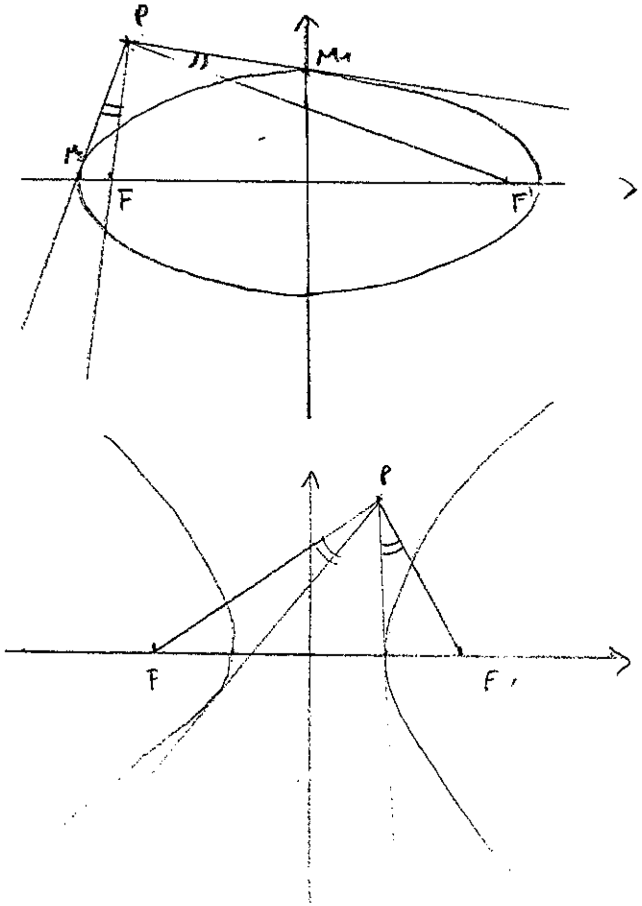
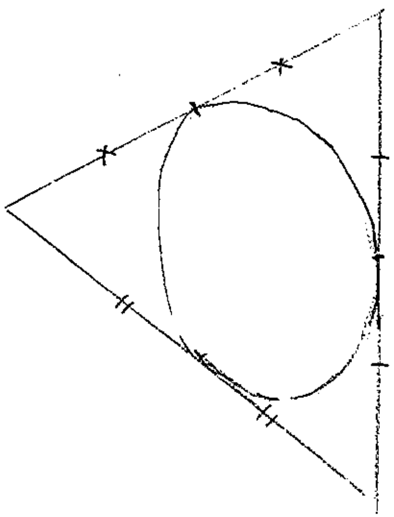


Fig n°4

Ellipse de Steiner



Références

- Audin, Géométrie [AUD]
- Ladegaillerie, Géométrie [LAD]
- Nguyen, Maths MPSI [NGU]
- Mercier-Rombaldi, CApes externe 2009 [MR
- Oraux X-Ens, Algèbre 3 [FGN3]

De biaisi

Gothaux vol 5

Développement : Ellipse de steiner.

on se place dans un plan affine complexe ($\mathcal{P}$).

<u>Théo</u> : soit $f \in \mathbb{C}[X]$ un polynome unitaire de degré 3 à coefficients complexes ayant 3 racines distinctes $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.
on suppose que les points M_i d'affixe z_i sont non alignés dans le plan $\mathcal{P}$.
Alors les racines de f' sont les affixes des foyers d'une ellipse tangente aux milieux des trois cotés du triangle $T = M_1 M_2 M_3$. Cette ellipse est appelé l'ellipse de steiner.

---

on pose A, B, C milieu de $[M_1M_2]$, $[M_2M_3]$, $[M_3M_1]$.
soit $\omega, \omega' \in \mathbb{C}$ racines de f'.

on a $f = (X-z_1)(X-z_2)(X-z_3) = X^3 - \left(\sum_1^3 z_i\right)X^2 + \sum_{i<j} z_i z_j$

Donc :
$$f' = 3X^2 - 2\left(\sum_1^3 z_i\right)X + \sum_{i<j} z_i z_j \quad (L_1)$$
$$f' = \sum_{i<j} (X-z_i)(X-z_j) \quad (L_2)$$
$$f' = 3(X-\omega)(X-\omega'). \quad (L_3)$$

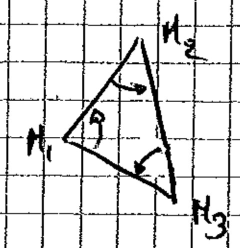
<u>1er cas</u> : $T = M_1M_2M_3$ triangle équilatéral

↳ <u>1er étape</u> : f' admet une racine double $\Leftrightarrow \sum_1^3 z_i^2 = \sum_{i<j} z_i z_j$

f' admet une racine double $\Leftrightarrow \Delta = 0$
$$\Leftrightarrow \left(\sum_1^3 z_i\right)^2 - 3\sum_{i<j} z_i z_j = 0$$
$$\Leftrightarrow \sum_1^3 z_i^2 + 2\sum_{i<j} z_i z_j - 3\sum_{i<j} z_i z_j =$$
$$\Leftrightarrow \sum_1^3 z_i^2 = \sum_{i<j} z_i z_j$$

↳ <u>2e étape</u> : T équilatéral $\Leftrightarrow$ f' admet une racine double

$\Rightarrow$ soit $T = M_1M_2M_3$ triangle équilatéral. Alors : $\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1} = \dfrac{z_3-z_2}{z_1-z_2}$



$\Leftrightarrow -(z_2-z_1)^2 = (z_3-z_2)(z_3-z_1)$

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{3} z_i^2 = \sum_{i<j} z_i z_j$

$\Leftrightarrow$ f' a une racine double

$\Leftarrow$ supposons que f' admet une racine double.

Donc $\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1} = \dfrac{z_3-z_2}{z_1-z_2}$ ie $\begin{cases} (\overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M_2}) = (\overrightarrow{M_2M_1}, \overrightarrow{M_2M_3}) \ [2\pi] \\ M_1M_2^2 = M_1M_3 \cdot M_2M_3 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} M_1M_2M_3 \text{ isocèle en } M_3 \\ M_1M_2^2 = M_1M_3 \times M_2M_3 \end{cases}$ ie $M_1M_2 = M_2M_3 = M_1M_3$.

Donc $T = M_1M_2M_3$ équilatéral.

2. 3e étape : Comme T équilatéral, on a $\omega = \omega'$.

Montrons que $\omega = \frac{1}{3}\sum_{1}^{3} z_i$

comme $(L_1) = (L_3)$: $3(X-\omega)^2 = 3X^2 - 2(\sum z_i)X + \sum_{i<j} z_i z_j$

on a : $\omega = \frac{1}{3}\sum_{1}^{3} z_i$

On en déduit que ω est l'affixe du centre de gravité du triangle $T = M_1M_2M_3$

Comme T est équilatéral, le centre de gravité est aussi le centre du cercle inscrit au triangle T

Donc l'ellipse cherchée ici est le cercle inscrit au triangle dont les foyers sont confondus au centre du cercle.

Par définition du cercle inscrit à un triangle, le cercle est tangent aux côtés du triangle.

2ᵉ cas : T non équilatéral.

Comme T est non équilatéral, on a que f' admet deux racines distinctes. Donc $\omega \neq \omega'$.

① Soit $\mathcal{E} = \{ M \in \mathcal{P} \,/\, MF + MF' = AF + AF' \}$

avec F, F' points d'affixe ω, ω'.

On remarque $A \in \mathcal{E}$.

Montrons que $\mathcal{E}$ est une ellipse :

$\mathcal{E}$ ellipse $\iff \forall M \in \mathcal{P},\ MF + MF' > FF'$

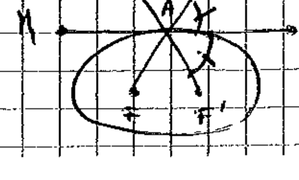
$\iff AF + AF' > FF'$

$\iff A \notin [FF']$

Raisonnons par l'absurde. Supposons que $A \in [FF']$.
Donc A est un barycentre à coefficients positifs de F, F'.
D'après le théo de Gauss-Lucas, les points F, F' sont à l'intérieur de l'enveloppe convexe de M_1, M_2, M_3, car les racines de f' sont différentes de celles de f.
Autrement dit, F, F' sont des barycentres de M_1, M_2, M_3 à coefficients strictement positifs.
Par l'associativité du barycentre, on en déduit que A est barycentre à coefficients strictement positifs de M_1, M_2, M_3.
Or $A \in [M_1 M_2]$. Contradiction.
Donc $\mathcal{E}$ ellipse.

② Montrons que $[M_1 M_2]$ est tangent à $\mathcal{E}$ en A.

$(M_1 M_2)$ tangent à $\mathcal{E}$ en A $\iff$ $(M_1 M_2)$ bissectrice extérieure de FAF' en A.



$\iff (\overrightarrow{M_2 M_1}, \overrightarrow{AF}) = (\overrightarrow{AF'}, \overrightarrow{M_1 M_2})$ [2π

$$\iff \exists k \in \mathbb{R} \,/\, \frac{\omega - a}{z_1 - z_2} = k \frac{z_2 - z_1}{\omega' - a}$$

avec "a" affixe de A milieu de $[M_1 M_2]$

i.e. $a = \frac{z_1 + z_2}{2}$

En utilisant, l'égalité entre les relations (L_2), (L_3), et en évaluant cette égalité en $x = a$, on trouve

$$\frac{\omega - a}{z_1 - z_2} = \frac{1}{12} \frac{z_2 - z_1}{\omega' - a}$$

En effet, $3(a-\omega)(a-\omega') = (a-z_1)(a-z_2) + (a-z_2)(a-z_3) + (a-z_1)(a-z_3)$

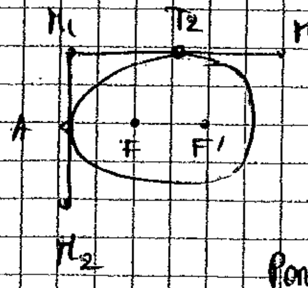
$$= \frac{(z_2 - z_1)(z_1 - z_2)}{4} + \underbrace{\frac{(z_1 - z_2)}{2}(a - z_3) + \frac{(z_2-z_1)}{2}(a-z_3)}_{=0}$$

$$\frac{(\omega - a)}{z_1 - z_2} = \frac{z_2 - z_1}{\omega' - a} \times \frac{1}{12}$$

ccl : $[M_1 M_2]$ est tangent à $\mathcal{E}$ en A.

③ Montrons que $(M_1 M_3)$ est une deuxième tangente à $\mathcal{E}$:

$(M_1 M_3)$ tangente à $\mathcal{E}$ $\iff$ $(M_1 M_3) = (M_1 T_2)$ où T_2 est le point où la droite $(M_1 M_3)$ est tangente à $\mathcal{E}$



$$\iff (\overrightarrow{M_1 M_3}, \overrightarrow{M_1 F'}) = (\overrightarrow{M_1 T_2}, \overrightarrow{M_1 F'}) \; [2\pi]$$

$$\iff (\overrightarrow{M_1 M_3}, \overrightarrow{M_1 F'}) = (\overrightarrow{M_1 F}, \overrightarrow{M_1 A}) \; [2\pi]$$

Poncelet $\iff (\overrightarrow{M_1 M_3}, \overrightarrow{M_1 F'}) = (\overrightarrow{M_1 F}, \overrightarrow{M_1 M_2}) \; [2\pi]$

$(M_1 M_2)$ tangente en A à $\mathcal{E}$ $\iff \exists k \in \mathbb{R} \,/\, \frac{\omega' - z_1}{z_3 - z_1} = k \frac{z_2 - z_1}{\omega - z_1}$ *

En évaluant, en $x = z_1$, l'égalité entre les relations (L_2), (L_3), on trouve * avec $k = 1/3$.

En utilisant, un résultat similaire, en remplaçant M_1 par M_2, on trouve que $(M_2 M_3)$ est tangente à $\mathcal{E}$.

④ Montrons que $T_2 = C$:

on sait que (M_1M_3) est la bissectrice extérieur de $F'T_2F$

soit F_1 le symétrique de F par rapport à (M_1M_3)

Donc $T_2 \in (F'F_1) \cap (M_1M_3)$

Comme $C \in [M_1M_3]$, montrons que $C \in (F'F_1)$.

En évaluant $(L_2) = (L_3)$ en $x = c = \frac{z_1+z_3}{2}$, on trouve

que $\frac{z_3 - z_1}{\omega' - c} = \frac{1}{12} \frac{\omega - c}{z_1 - z_3}$

Ainsi, $(\overrightarrow{M_3M_1}, \overrightarrow{CF}) = (\overrightarrow{CF'}, \overrightarrow{M_1M_3})$

Donc (M_3M_1) est la bissectrice extérieur de FCF',

Donc $T_2 = C$.

a)

Développement n° 2

on se place dans un plan affine réel.

Théo : soit (P) une parabole d'équation $y^2 = 2px$
L'ens des centres des triangles équilatéraux inscrits dans (P) décrivent une autre parabole P'.

$\Rightarrow$ soient M_1, M_2, M_3 trois pts distincts de (P) de coordonnées $\left(\frac{y_i^2}{2p}, y_i\right)$ $\forall i \in [\![1,3]\!]$ formant un triangle $T = M_1M_2M_3$ équilatéral.

soit $G(x_G, y_G)$ le centre de gravité de T.

on a donc la relation vectorielle $\vec{GM_1} + \vec{GM_2} + \vec{GM_3} = \vec{0}$

on en déduit les coordonnées de G :

$$x_G = \frac{\sum_1^3 y_i^2}{6p} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{\sum_1^3 y_i}{3}$$

Remarquons que :

$$T \text{ équilatéral} \iff G \text{ orthocentre de } T$$
$$\iff \begin{cases} \vec{GM_1} \cdot \vec{M_2M_3} = 0 & (*) \\ \vec{GM_2} \cdot \vec{M_1M_3} = 0 \\ \vec{GM_3} \cdot \vec{M_1M_2} = 0 \end{cases}$$

Explicitons le produit vectoriel : $(*)$

Les 2 autres produits vectoriels s'obtiennent de la même manière :

$$\vec{GM_1} \cdot \vec{M_2M_3} = 0 \iff \left(\frac{y_1^2}{2p} - x_G\right)\left(\frac{y_3^2}{2p} - \frac{y_2^2}{2p}\right) + (y_1 - y_G)(y_3 - y_2) = 0$$
$$\iff (y_1^2 - 2px_G)(y_3 + y_2) + 4p^2(y_1 - y_G) = 0$$
$$\iff (y_1^2 - 2px_G)(3y_G - y_1) + 4p^2(y_1 - y_G) = 0$$

On obtient la même relation en y_2, y_3 par symétrie des

Donc $\forall i \in [\![1,3]\!]$, y_i racines de $P = -(X^2 - 2p x_G)(3y_G - X) - 4p^2(X - y_G)$

i.e. $P = X^3 - 3y_G X^2 - (2p x_G + 4p^2) X + (6p x_G y_G + 4p^2 y_G)$

Relations Coefficients / Racines : $\sigma_1 = \sum_1^3 y_i = 3y_G$

$\sigma_2 = \sum_{i<j} y_i y_j = -(2p x_G + 4p^2)$

or $\sum_1^3 y_i^2 = \left(\sum_1^3 y_i\right)^2 - 2\sum_{i<j} y_i y_j = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 6p\, x_G$

$= 9y_G^2 + 4p x_G + 8p^2 = 6p\, x_G$

i.e. $y_G^2 = \frac{2p}{9}(x_G - 4p)$

Donc $G(x_G, y_G)$ vérifie l'équation de la parabole $(\mathcal{P}')$:

$$Y^2 = \frac{2p}{9}(X - 4p)$$

$\Leftarrow$ soit $G(x_G, y_G)$ un point de la parabole $(\mathcal{P}')$ $Y^2 = \frac{2p}{9}(X - 4p)$

soit y_1, y_2, y_3 les racines du polynome P, distincts.

A priori, les racines sont complexes. on admet provisoirement que les racines sont réelles.

on considère 3 points de la parabole $(\mathcal{P})$: $M_i\left(\frac{y_i^2}{2p}, y_i\right)$

on remarque : $\frac{\sum_1^3 y_i}{3} = \frac{\sigma_1}{3} = y_G$

$\frac{\sum y_i^2}{6p} = \frac{\sigma_1^2 - 2\sigma_2}{6p} = x_G$.

Donc G est le centre de gravité de $T = M_1 M_2 M_3$

En remontant les calculs du sens précédent, on en déduit que :

T est équilatéral.

Montrons que $\forall y_G \in \mathbb{R}$, P admet 3 racines distinctes réelles

P s'écrit $P = X^3 - 3y_G X^2 - (9y_G^2 + 12p^2) X + 28p^2 y_G + 27 y_G^3$

car $y_G^2 = \frac{2p}{9}(x_G - 4p)$.

Ainsi, on a : $P' = 3X^2 - 6y_G X - (9y_G^2 + 12p^2)$

P' admet 2 racines réelles : $y_\pm = \frac{6y_G \pm \sqrt{36y_G^2 + 12(9y_G^2 + 12p^2)}}{6}$

i.e. $y_\pm = y_G \pm 2\sqrt{y_G^2 + p^2}$

L'une des deux est négative et l'autre est positive

P admet 3 racines réelles distinctes $\Longleftrightarrow P(y_+)P(y_-) < 0$.

Pour cela, on fait la division euclidienne de P par P' :

$$P = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y_G\right)\left[3x^2 - 3y_G x - (9y_G^2 + 12p^2)\right] - 8(y_G^2 + p^2)(x - 3y_G)$$

$$P = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y_G\right)P' + R.$$

Donc P admet 3 racines réelles distinctes $\Longleftrightarrow R(y_+)R(y_-) < 0$

or
$$R(y_-)R(y_+) = 16(y_G^2 + p^2)^2 (y_+ - 3y_G)(y_- - 3y_G)$$
$$= 16(y_G^2 + p^2)^2 \left(-2y_G + 2\sqrt{y_G^2 + p^2}\right)\left(-2y_G - 2\sqrt{y_G^2 + p^2}\right)$$
$$= 16(y_G^2 + p^2)^2(-4p^2) < 0.$$

Donc le polynome P admet 3 racines réelles distinctes.

Développement n° 3

COOL

On se place dans un plan affine réel dans lequel on fixe pour origine le point O

Théo : soit (P) une parabole d'équation $y^2 = 2px$ de foyer $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$
soit (Δ) droite variable passant par F et coupant (P) en deux points A, B.
L'ensemble des centres des cercles circonscrits aux triangles OAB décrivent une autre parabole.

Ici, on exclut le cas où (Δ) est confondu avec l'axe focal car cette droite ne coupe (P) qu'en un seul point.

① L'équation de (Δ) passant par F s'écrit : $my = x - \frac{p}{2}$ où $m \in \mathbb{R}$.
On fait varier la droite en faisant varier m.

② Comme les points $A, B \in (P) \cap (\Delta)$, les coordonnées $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ de A, B sont solutions du système : $\begin{cases} y^2 = 2px \\ my = x - \frac{p}{2} \end{cases}$

Autrement dit, les coordonnées de A, B sont de la forme :

$\left(\frac{y^2}{2p}, y\right)$ avec y solution de $y^2 - 2pmy - p^2 = 0$

Notons que les solutions y_1, y_2 de * vérifie les relations coefficients / Racines suivantes : $\begin{cases} y_1 + y_2 = 2pm \\ y_1 \cdot y_2 = -p^2 \end{cases}$

Soit $\Omega(x', y')$ le centre du cercle circonscrit au triangle OAB

<u>Montrons que l'ens des pts Ω vérifie une équation parabolique.</u>

Comme les médiatrices des triangles se coupent au centre du cercle circonscrit au triangle, le point Ω appartient à la médiatrice de $[OA]$, $[OB]$, noté (d), (d').

<u>Déterminons les équations de droite des médiatrices de $[OA]$, $[OB]$:</u>

↳ (OA) d'équation : $y = \frac{2p}{y_1} x$ de vecteur directeur $\vec{u}\left(1, \frac{2p}{y_1}\right)$

↳ (d) d'équation : $y = \alpha x + \beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, de vecteur directeur $\vec{v}(1, \alpha)$

Comme les deux droites sont perpendiculaires, on a :

$(1, \alpha)\left(1, \frac{2p}{y_1}\right) = 1 + \alpha \frac{2p}{y_1} = 0$ ie $\alpha = -\frac{y_1}{2p}$.

Donc $y = -\frac{y_1}{2p} x + \beta$.

Soit I milieu de $[OA]$ de coordonnées $\left(\frac{y_1^2}{4p}, \frac{y_1}{2}\right)$, qui appartient aussi à la médiatrice (d).

Donc (d) : $y = -\frac{y_1}{2p} x + \frac{y_1}{2}\left(1 + \frac{y_1^2}{4p^2}\right)$

(d') : $y = -\frac{y_2}{2p} x + \frac{y_2}{2}\left(1 + \frac{y_2^2}{4p^2}\right)$

Donc $\Omega(x', y')$ vérifie : $\frac{1}{2p}(y_2 - y_1) x' = \frac{y_2 - y_1}{2} + \frac{y_2^3 - y_1^3}{8p^2}$

Donc : $x' = p + \frac{y_2^2 + y_1^2 + y_1 y_2}{8p^2} = p + \frac{(y_2 + y_1)^2 - y_1 y_2}{8p^2} = p + \frac{4p^2m^2 + p^2}{8p^2}$

ie $\boxed{x' = \frac{5p}{4} + pm^2}$

Ainsi, $y' = -\frac{y_2}{2p}\left(\frac{5p}{4} + pm^2\right) + \frac{y_2}{2}\left(1 + \frac{y_2^2}{4p^2}\right)$

$y' = \frac{y_2}{8}\left(-1 - 4m^2 + \frac{y_2^2}{p^2}\right) = \frac{y_2}{8}\left(-1 + \frac{y_2^2}{p^2} - \frac{(2pm)^2}{p^2}\right)$

Ainsi, $y' = \frac{y_2}{8p^2}\left(-1 + y_2^2 - (y_1+y_2)^2\right)$

$$y' = \frac{y_2}{8p^2}\left(-p^2 - y_1^2 - 2y_1y_2\right)$$

$$y' = \frac{y_2}{8p^2}\left(y_1y_2 - y_1^2 - 2y_1y_2\right) = \frac{-y_2}{8p^2}\left(y_1^2 + y_1y_2\right)$$

$$y' = -\frac{y_2y_1}{8p^2}(y_1+y_2) = \frac{2pm}{8} = \frac{pm}{4}.$$

Donc, $x' = \frac{5p}{4} + pm^2 = \frac{5p}{4} + 16\frac{y'^2}{p}$

Autrement dit, $y'^2 = \frac{p}{16}\left(x' - \frac{5p}{4}\right)$

Donc x appartient à la parabole $y^2 = \left(-\frac{5p}{4} + x\right)\frac{p}{16}$.

=> un peu dangereux car on utilise que la def de parabole.

essayer de faire des raisonnements géométriques