171 - Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications

Cadre : E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie

I - Forme quadratique et représentation matricielle

a) Définition et forme polaire

Def 1 On appelle forme quadratique sur E une application $q : E \to \mathbb{R}$ de la forme $q(x) = \varphi(x,x)$, avec φ une forme bilinéaire sur $E \times E$.

Rmq 2 Une forme quadratique s'interprète comme un polynôme homogène de degré 2 en les composantes de $x \in E$.

Ex 3 $q(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 5x_1x_2 - 6x_1x_3 + 7x_2x_3$

$$\varphi(x,y) = 3x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_3y_3 + \frac{5}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) - 3(x_1y_3 + x_3y_1) + \frac{7}{2}(x_2y_3 + x_3y_2).$$

Prop 4 (i) Soit $b : E\times E \to \mathbb{R}$ bilinéaire symétrique, alors $q : \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ x \mapsto b(x,x) \end{array}$ forme quadratique.

(ii) Soit $q : E \to \mathbb{R}$ forme quadratique, alors il existe $b : E \times E \to \mathbb{R}$ bilinéaire symétrique, unique, telle que $b(x,x) = q(x)$, donnée par $b(x,y) = \dfrac{q(x+y) - q(x) - q(y)}{2}$

Def 5 b est appelée "forme polaire de q"

Ex 6 · Dans l'exemple 3, φ est la forme polaire de q.

· $q : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \|x\|_2^2 \end{array}$, $b(x,y) = \langle x, y\rangle_2 = x^t y$

· $q : \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ A \mapsto \mathrm{tr}({}^tAA) \end{array}$, $b(A,B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$

b) Représentation matricielle

Def 7 Soit $\{e_i\} = \mathcal{B}$ une base de E, la matrice d'une forme bilinéaire b, dans la base $\mathcal{B}$ est

$$B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(b) = \begin{pmatrix} b(e_1,e_1) & \cdots & b(e_1,e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ b(e_n,e_1) & \cdots & b(e_n,e_n) \end{pmatrix}$$

Rmq 8 Si $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$,

$$b(x,y) = {}^tXBY.$$

Rmq 9 Si b est symétrique, B est également symétrique.

Prop 10 Pour $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, on a, pour b forme bilinéaire,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(b) = {}^tP\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(b)\,P.$$

Rmq 11 $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(b)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(b)$ sont congruentes.

Def 12 Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique et $\mathcal{B}$ une base de E, on pose $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(b)$, où b est la forme polaire de q.

Ex 13 $q : \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 3x_1^2 + y_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_1x_3 \end{array}$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ avec $\mathcal{B}$ la base canonique.

Def 14 Pour q forme quadratique, et b sa forme polaire, on pose : · $\mathrm{rg}(q) := \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)) = \mathrm{rg}(b)$

· $\mathrm{Ker}(q) := \{x \in E : \forall y \in E,\ b(x,y) = 0\}$

On dit, de plus, que q est non dégénérée si $\mathrm{Ker}(q) = \{0\}$.

Ex 15 · La norme $\|\cdot\|_2^2$ sur $\mathbb{R}^n$ est non dégénérée.

· $q(x) = x_1^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 6x_2x_3$ est dégénérée car $\mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Forme quadratique définie positive

Def 16 q forme quadratique est définie si $q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Rmq 17 "définie" implique non dégénérée. La réciproque est fausse.

Def 18 q est positive si $\forall x \in E,\ q(x) \geq 0$.

Th 19 (Schwarz)
Si $q : E \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique positive, alors $\forall x, y \in E,\ |b(x,y)|^2 \leq q(x)\,q(y)$, où b est sa forme polaire.

Rmq 20 Il y a égalité dans le Théorème 19 ssi (x,y) liée.

Cor 21 (Minkowski)
Si q est positive, alors $\forall x, y \in E,\ \sqrt{q(x+y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}$

App 22 $q : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto tr({}^tAA)$ est une norme.

II - Orthogonalité et isotropie

a) Orthogonalité

Def 23 $x, y \in E$ sont dits q-orthogonaux, pour $q : E \to \mathbb{R}$, si $b(x,y) = 0$, où b est la forme polaire de q.

Pour $A \subset E$, on pose $A^\perp = \{y \in E : \forall x \in A,\ b(x,y) = 0\}$

Rmq 24 $Ker(q) = E^\perp$ et q non dégénérée $\Leftrightarrow E^\perp = \{0\}$

Prop 25 Pour F sev de E, on a $F^{\perp\perp} = F + Ker(q)$ et
$\dim(E) = \dim(F) + \dim(F^\perp) - \dim(F \cap Ker(q))$.

Cor 26 Pour q non dégénérée, $F^{\perp\perp} = F$ et
$\dim(E) = \dim F + \dim F^\perp$.

b) Groupe orthogonal

Def 27 On pose $O(q) = \{f \in End(E) : q(f(x)) = q(x),\ \forall x \in E\}$ et on l'appelle "groupe orthogonal (associé à q)".

Prop 28 $(O(q), \circ)$ est un groupe.

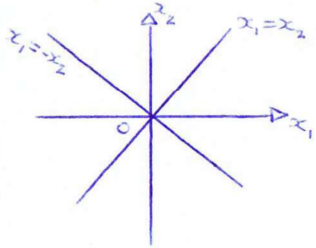
Prop 29 Soit $\mathcal{B}$ une base de E, $B = Mat_{\mathcal{B}}(q)$ et $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$, où $f \in End(E)$. On a : $f \in O(q) \Leftrightarrow {}^tABA = B$

Rmq 30 Si $Mat_{\mathcal{B}}(q) = I$, $f \in O(q) \Leftrightarrow {}^tAA = I$.

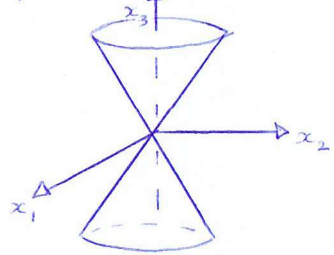
c) Isotropie

Def 31 $x \in E$ est isotrope si $q(x) = 0$. On note $C(q)$ l'ensemble des vecteurs isotropes et on l'appelle "cône isotrope".

Ex 32
$q : x \in \mathbb{R}^2 \mapsto x_1^2 - x_2^2$
$C(q) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = \pm x_2\}$



$q : x \in \mathbb{R}^3 \mapsto x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$
$C(q) = \{x_3 = \pm\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\}$



Rmq 33 $Ker(q) \subset C(q)$ et q définie $\Rightarrow C(q) = \{0\}$

Def 34 Un sev F de E est isotrope si $F \cap F^\perp \neq \{0\}$.

Prop 35 On a l'équivalence : F non isotrope $\Leftrightarrow E = F \oplus F^\perp$.

III - Bases orthonormées et réduction

a) Bases orthonormées

Def 36 $\mathcal{B} = \{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ base de E est $\begin{cases} q\text{-orthogonale si } b(e_i, e_j) = 0\ \forall i \neq j. \\ q\text{-orthonormée si } b(e_i, e_j) = \delta_{ij} \end{cases}$

Rmq 37 $\mathcal{B} = \{e_i\}$ est q-orthogonale ssi $Mat_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$
ssi $q(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2$, où $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

Th 38 Il existe, en dimension finie, une base q-orthogonale.

Rmq 39 La recherche de bases q-orthogonales peut se faire algorithmiquement. (méthode de Gauss)

Ex 40 $q : x \in \mathbb{R}^3 \mapsto x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_2x_3$ admet comme base q-orthogonale $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} \right\}$.

b) Réduction

Th 41 (de Réduction Simultanée) Soit q et $\tilde{q}$ deux formes quadratiques sur E telles que q est définie positive. Alors il existe une base $\tilde{q}$-orthogonale et q orthonormée.

Cor 42 Soit M une matrice symétrique définie positive et N symétrique alors il existe C inversible telle que ${}^tCMC = I$ et ${}^tCNC$ diagonale.

Cor 43 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques définies positives et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha + \beta = 1$. Alors, $\det(\alpha A + \beta B) \geq (\det A)^\alpha (\det B)^\beta$.

DEV 1

Th 44 (Ellipsoïde de John-Loewner)
Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$, il existe un unique ellipsoïde centré en O, de volume minimal, contenant K.

Th 45 (Inertie de Sylvester).
Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique et $n = \dim(E)$, il existe une base $\mathcal{B} = \{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$ telle que si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on a $q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$, c'est à dire

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & 0 \\ 0 & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

avec $r = \mathrm{rg}(q)$ et $p \in \mathbb{N}$ indépendant de la base $\mathcal{B}$.

Def 46 Le couple $(p, r-p)$ est noté $\mathrm{sign}(q)$ et appelé signature.

Rmq 47 $p = \max\{\dim(F) : F \text{ sev de } E \text{ et } q_{|F} \text{ définie positive}\}$

Ex 48. $q : x \in \mathbb{R}^3 \mapsto x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_2x_3$

$q(x) = (x_1 + x_2)^2 + 2(x_2 + 2x_3)^2 - x_3^2$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

et $\mathrm{sign}(q) = (2, 1)$

- $q : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{tr}(A^2)$ a pour signature $\left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2}\right)$.

Rmq 49 q définie positive $\Leftrightarrow \mathrm{sign}(q) = (\dim E, 0)$.

IV - Coniques - Application des formes quadratiques en géométrie

a) Classification des coniques

Def 50 Soit q une forme quadratique non nulle et φ une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$, muni de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (produit scalaire canonique). On appelle conique l'ensemble $\mathcal{C}$ des $v \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $q(v) + \varphi(v) = k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Rmq 51 L'équation d'une conique peut s'écrire, dans une base bien choisie, $aX'^2 + bY'^2 - 2rX' - 2sY' = k$, d'inconnues X' et Y'.

Th 52 (de classification)
Soit $\mathcal{C}$ une conique définie par $q(v) + \varphi(v) = k$. On suppose $\mathcal{C} \neq \emptyset$ et $\mathcal{C}$ non réduite à un point, alors

- si $\mathrm{sign}(q) = (2, 0)$, $\mathcal{C}$ est une ellipse
- si $\mathrm{sign}(q) = (1, 1)$, $\mathcal{C}$ est une hyperbole, ou deux droites sécantes
- si $\mathrm{sign}(q) = (1, 0)$, $\mathcal{C}$ est une parabole, qui dégénère en une droite, ou deux droites parallèles.

Rmq 53 De manière analogue, on peut définir la notion de quadrique en dimension supérieure, et les classifier.

b) Géométrie différentielle

Def 54 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable, on note

$$D^2 f(a) = \left(\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i} \right)_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Th 55 (Schwarz) Pour f deux fois différentiable, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, $\forall i, j$

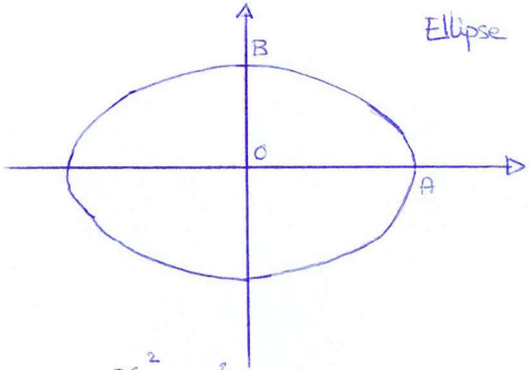
Rmq 56 $(h, k) \mapsto D^2 f(a)(h, k) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} h_i k_j$ est bilinéaire symétrique, donc définit une forme quadratique $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

DEV 2

Lemme 57 Soit $A_0 \in GL_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})$, il existe V voisinage de A_0 dans $S_n(\mathbb{R})$ et $\varphi : V \to GL_n(\mathbb{R})$ C^1, tel que $A = {}^t\varphi(A) A_0 \varphi(A)$, $\forall A \in V$.

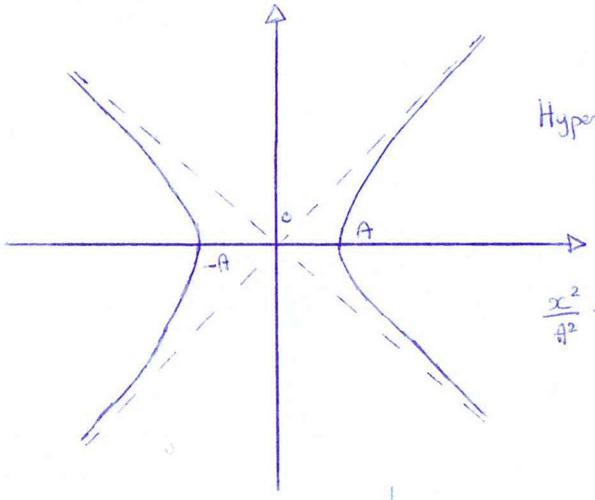
Lemme 58 (de Morse) Soit $0 \in U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : U \to \mathbb{R}$ C^3 et 0 point quadratique non dégénéré critique. Alors il existe φ un C^1-difféo tel que $\varphi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$

Annexe : Classification des coniques



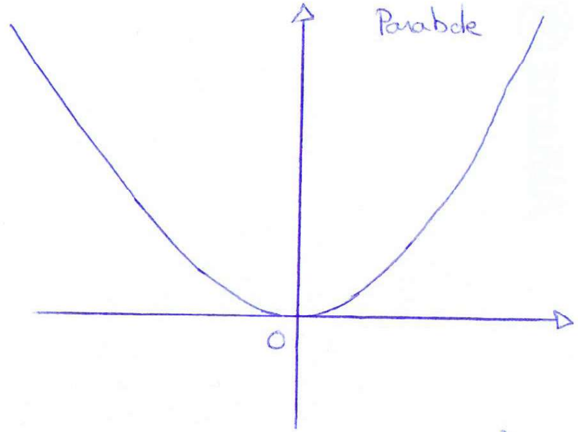
Ellipse

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$



Hyperbole

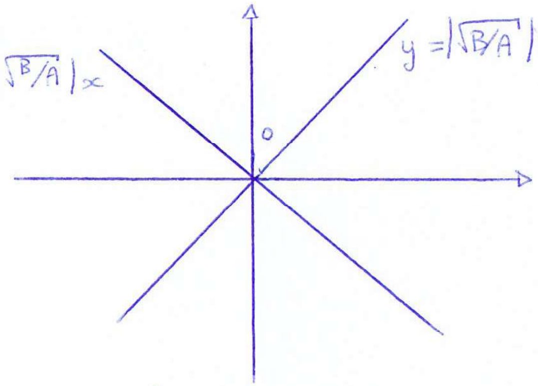
$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$$



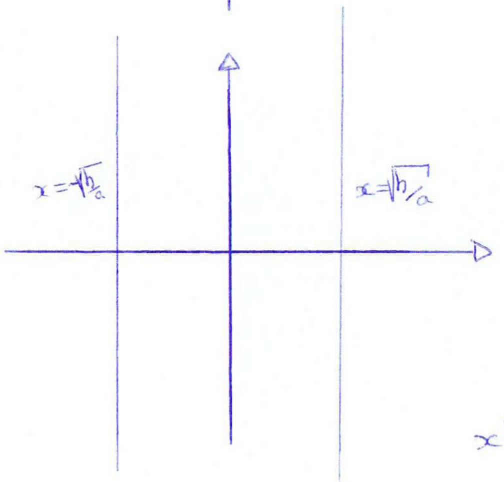
Parabole

$$y = ax^2$$

$y = -\left|\sqrt{B/A}\right| x$ $\qquad$ $y = \left|\sqrt{B/A}\right| x$



$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 0$$



$$x^2 = h/a$$

Références

- Algèbre linéaire - Grifone
- Algèbre - Gourdon
- Petit guide de calcul différentiel - Rouvière
- Oraux X-ENS - Francinou ; Gianella ; Nicolas
- Invitation aux formes quadratiques - De Seguins Pazzis