E est un $\mathbb{K}$-evn avec car $\mathbb{K} \neq 2$

I - Formes bilinéaires et quadratiques

1) Premières définitions et propriétés

Déf 1 : Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$, $(x, y) \mapsto \varphi(x, y)$

On dit que φ est bilinéaire si

i) $\forall x \in E$ $y \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire

ii) $\forall y \in E$ $x \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire.

Ex 2 : L'application $\varphi : \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})^2 \to \mathbb{R}$, $(f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt$ est bilinéaire

Déf 3 : On dit que φ est symétrique si $\forall (x,y) \in E^2$ $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$.

Déf 4 : On appelle forme quadratique sur E toute application de la forme $q : E \to \mathbb{K}$, $x \mapsto \varphi(x,x)$ où φ est une forme bilinéaire symétrique.

Prop 5 : Soit q une forme quadratique, il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ telle que $\forall x \in E$ $q(x) = \varphi(x,x)$. On appelle φ la forme polaire de q et on a $\forall (x,y) \in E^2$

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)] = \frac{1}{4}[q(x+y) - q(x-y)]$$

Déf 6 : On note $Q(E)$ l'ensemble des formes quadratiques de E.

Prop 7 : $Q(E)$ est isomorphe à l'ensemble des formes bilinéaires symétriques de E.

2) Représentation matricielle d'une forme quadratique

Déf 8 : Soit φ une forme bilinéaire sur E et B une base de E. On appelle matrice de φ dans la base B la matrice $A = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n}$

Si q est une forme quadratique, alors sa matrice dans une base B est la matrice de sa forme polaire φ.

Déf 10 : Le rang d'une forme quadratique est le rang de la matrice.

Ex 11 : $q(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + 2xy - 3xz$

La matrice de q dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Prop 12 : Soit $q \in Q(E)$ et A sa matrice associée dans une base B. Alors si $x \in E$ a pour vecteur de coordonnées X dans la base B, $q(x) = {}^tX A X$. De plus si B_1 et B_2 sont deux bases de E et P la matrice de passage de B_1 à B_2. Alors $\mathcal{M}_{B_2}(q) = {}^tP \mathcal{M}_{B_1}(q) P$.

Déf 13 : Soit B une base de E. Deux formes quadratiques q_1 et q_2 sont équivalentes lorsqu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $\mathcal{M}_B(q_1) = {}^tP \mathcal{M}_B(q_2) P$. (les matrices sont congruentes)

3) Rang et noyau d'une forme quadratique

Déf 14 : Le noyau d'une forme quadratique q est défini par $\text{Ker}\, q = \{x \in E \mid \forall y \in E\ \varphi(x,y) = 0\}$.

Ex 15 : Pour toute matrice $A \in S_n(\mathbb{K})$, le noyau de la forme quadratique $X \mapsto {}^tXAX$ est $\text{Ker}\, A$.

Prop 16 : Soit q une forme quadratique sur E de dimension n. Alors $\text{rg}(q) + \dim(\text{Ker}\, q) = n$.

Prop 17 : Deux formes quadratiques équivalentes ont le même rang.

Déf 18 : On dit qu'une forme quadratique q est non dégénérée si $\text{Ker}\, q = \{0\}$.

Scanné avec CamScanner

Ex 19 : la forme quadratique $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $M \mapsto \mathrm{tr}(M^2)$ est non dégénérée.

Def 20 : On dit qu'une forme quadratique est non dégénérée si
$q(x) = 0 \iff x = 0$

Prop 21 : Si q est définie, alors elle est non dégénérée.

Ex 22 : la réciproque est fausse. La forme quadratique $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto xy$ est non dégénérée mais pas définie.

II - Orthogonalité et isotropie

1) Orthogonalité

Def 23 : Soit q une forme quadratique de forme polaire φ.
Deux vecteurs $x, y \in E$ sont orthogonaux si $\varphi(x,y) = 0$.
Si $A \subset E$, on note $A^\perp = \{ y \in E \mid \forall x \in A \ \varphi(x,y) = 0 \}$.
On dit que A et B sont orthogonaux si $\forall (x,y) \in A \times B$ $\varphi(x,y) = 0$
et on note $A \perp B$.

Prop 24 : $A^\perp$ est un sev de E et $A^\perp = (\mathrm{Vect}(A))^\perp$
- Si $A \subset E$ alors $A \subset (A^\perp)^\perp$
- Si $A \subset B \subset E$ alors $B^\perp \subset A^\perp$
- $E^\perp = \mathrm{Ker}\, q$

Prop 25 : Soit F sev de E, alors $\dim F + \dim F^\perp = \dim E + \dim (F \cap \mathrm{Ker}\, q)$
et $(F^\perp)^\perp = \mathrm{Vect}(F, \mathrm{Ker}\, q)$.

2) Bases orthogonales

Def 26 : Une base $\mathcal{B}$ est dite q-orthogonale si pour tout couple d'éléments distincts (e, e'), $\varphi(e, e') = 0$.

Rq 27 : Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est q-orthogonale, alors $\forall x \in \mathbb{K}^n$
$q\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i^2 q(e_i)$ et la matrice de q dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale.

Th 28 : Toute forme quadratique q admet une base q-orthogonale.

Méthode 29 (Gauss) :
Pour réduire une forme quadratique avec ~~que des termes rectangles et~~ au moins un carré
$q(x) = a_{11} x_1^2 + \dots + a_{nn} x_n^2 + \dots + a_{ij} x_i x_j + \dots$
avec $a_{11} \neq 0$.
- On ordonne suivant la variable x_1
- On écrit les termes contenant x_1 comme le début d'un carré
- On obtient le carré d'une forme linéaire qui ne contient pas x_1
- On recommence l'opération sur les termes qui ne contiennent plus x_1 jusqu'à obtenir une somme de carrés de formes linéaires

Ex 30 $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$ se réduit en
$q(x) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 + x_3^2$

Méthode 31 (Gauss)
Pour réduire une forme quadratique avec que des termes rectangles
$q(x) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$.
- On choisit un terme rectangle à coefficient non nul $k x_i x_j$ avec $k \neq 0$.
- On calcule les dérivées partielles $\frac{\partial q}{\partial x_i}$ et $\frac{\partial q}{\partial x_j}$
- On écrit $q(x) = \frac{1}{k} \frac{\partial q}{\partial x_i} \frac{\partial q}{\partial x_j} + \dots$
- On aura une expression du type $q(x) = \frac{1}{k} \varphi_1(x) \varphi_2(x) + \dots$
- $\varphi_1 \varphi_2 = \frac{1}{4} [(\varphi_1 + \varphi_2)^2 - (\varphi_1 - \varphi_2)^2]$
- Et on recommence jusqu'à qu'on obtienne une somme de carrés de formes linéaires.

App 32 : La méthode de Gauss permet de trouver une base q-orthogonale.

Scanné avec CamScanner

3) Isotropie

Def 33 : Soit q une forme quadratique. On appelle cône isotrope de q l'ensemble $C_q = \{x \in E \mid q(x) = 0\}$. Un vecteur $x \in E$ est dit isotrope si $x \in C_q$.

Cex 34 : Ker $q \subset C_q$ mais la réciproque n'est pas vraie :
$q(x) = x^2 - y^2$ Ker $q = \{0\}$ $C_q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = +/- y\}$

Def 35 : On dit que F sev de E est isotrope si $F \cap F^\perp \neq \{0\}$

Prop 36 : $F \oplus F^\perp = E \iff$ F est non isotrope.

Rq 37 : Si F est anisotrope, $\dim E = \dim F + \dim F^\perp$

III - Classification et relation

Def 38 : Soit q une forme quadratique non dégénérée et A sa représentation matricielle. Le discriminant de q est l'image de $\det(A)$ dans $\mathbb{K}^* / (\mathbb{K}^*)^2$. On le note Δ_q.

Prop 39 : Si $q \sim q'$ alors $rg(q) = rg(q')$ et $\Delta_q = \Delta_{q'}$.

Cex 40 : La réciproque est fausse $q_1(x,y) = x^2 + y^2$ $q_2(x,y) = -(x^2 + y^2)$

Classification

a) Sur $\mathbb{C}$

Th 41 : Soit q une forme quadratique. Il existe une base (e_i) de q si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ alors $q(x) = x_1^2 + \dots + x_r^2$ où $r = rg(q)$.
$$M_B(q) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

Cor 42 : Pour une forme quadratique sur un $\mathbb{C}$-ev, il existe une base orthogonale ssi $rg(q) = n$.

b) Sur $\mathbb{R}$

Th 43 : (Inertie de Sylvester) Il existe une base B telle que
$$M_B(q) = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ où $rg(q) = r$.

Le couple $(p, r-p)$ est appelé signature de q et est noté $sign(q)$.

Coro 44 : q définie $\iff sign(q) = (n, 0)$
q non dégénérée $\iff sign(q) = (p, n-p)$ où $0 \leq p \leq n$.

c) Sur $\mathbb{F}_q$

Th 45 : Soit $\alpha \in \mathbb{F}_q^*$, $\alpha \notin \mathbb{F}_q^{*2}$. Alors il y a 2 classes d'équivalence de formes quadratiques non dégénérées sur E de matrice $Q_1 = I_n$ et $Q_2 = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$; une forme quadratique est de l'une ou l'autre forme suivant que son discriminant soit un carré ou non.

Def 46 : Soit p un nombre premier impair et $a \in \mathbb{F}_p$. On définit le symbole de Legendre par $\left(\frac{a}{p}\right) = a^{\frac{p-1}{2}} = \begin{cases} 1 & \text{si } a \text{ est un carré dans } \mathbb{F}_p^* \\ -1 & \text{si } a \text{ n'est pas un carré dans } \mathbb{F}_p^* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Th 47 : Soit p, q deux nombres premiers impairs. Alors $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}$ (loi de réciprocité quadratique)

IV - Groupe orthogonal

Def 48 : Soit q une forme quadratique non-dégénérée et $f \in End(E)$. On dit que f est orthogonal relativement à q si $q(f(x)) = q(x)$ $\forall x \in E$.
On note $O(q) = \{f \in End(E) \mid q(f(x)) = q(x)\ \forall x \in E\}$.

Sur $\mathbb{R}$

Prop 49 : $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA A = I_n\}$
$O(q) \simeq O_n(\mathbb{R})$

Th 50 : L'application $\mu : O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$, $(O, S) \mapsto OS$ est un homéomorphisme.

Def 51 : On note $I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$ où $p, q \in \mathbb{N}$
$O(p,q) = \{P \in GL_n(\mathbb{R}) \mid {}^tP I_{p,q} P = I_{p,q}\}$

Prop 52 : L'application μ induit un homéomorphisme $S_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\simeq} S_n^{++}(\mathbb{R})$

Prop 53 : Si $p, q \neq 0$ On a un homéomorphisme $O(p,q) \simeq O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$

Scanné avec CamScanner