170

Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

Soit $\mathbb{K}$ un corps, et E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n. Sauf mention contraire, car $(\mathbb{K}) \neq 2$.

I - FORMES QUADRATIQUES - DÉFINITIONS, EXEMPLES

1) Premières définitions

déf 1: Soit b une forme bilinéaire sur E. L'application $q : \begin{array}{l} E \to \mathbb{K} \\ x \mapsto b(x,x) \end{array}$ est appelée forme quadratique associée à b.

On note $\mathcal{Q}(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E.

Rem 2: q est nulle ssi b est alternée.

Rem 3: $\mathcal{Q}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,\mathbb{K})$.

Prop 4: Soit $q \in \mathcal{Q}(E)$. Alors q est associée à une unique forme bilinéaire symétrique sur E, appelée forme polaire associée à q et notée b_q.

Prop 5 (Formule de polarisation): Soit $q \in \mathcal{Q}(E)$, de forme polaire b_q. $\forall (x,y) \in E^2$, $b_q(x,y) = \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right)$

Ex 6:
- $q_1 \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^2)$, $q_1((x,y)) = x^2 - 2y^2 + xy$.
  $b_{q_1}((x,y),(x',y')) = xx' - 2yy' + \frac{1}{2}xy' + \frac{1}{2}x'y$
- $A \mapsto \operatorname{tr}(A^tA) \in \mathcal{Q}(M_n(\mathbb{K}))$, de forme polaire $(A,B) \mapsto \operatorname{tr}(A^tB)$

2) Représentation d'une forme quadratique ds une base

déf 7: Soient $q \in \mathcal{Q}(E)$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On définit la matrice de q dans $\mathcal{B}$: $M_{\mathcal{B}}(q) = (b_q(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n}$.
Cette matrice est symétrique.

Prop 8: Dans $\mathcal{B}$, q est représentée analytiquement par l'application $X \mapsto {}^tXAX$, où $A = M_{\mathcal{B}}(q)$.

Rem 9: Si $A \in S_n(\mathbb{K})$, $q_2 : X \mapsto {}^tXAX \in \mathcal{Q}(\mathbb{K}^n)$.

Prop 10: $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ bases de E, et P matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$.
Alors $M_{\mathcal{B}_2}(q) = {}^tP M_{\mathcal{B}_1}(q) P$.

Rem 11: Les matrices représentant une forme $q \in \mathcal{Q}(E)$ donnée forment une classe de congruence dans $S_n(\mathbb{K})$.

Prop 12: On a un diagramme commutatif d'isomorphismes de $\mathbb{K}$-ev:

$$\begin{tikzcd} S_2(E) \arrow[r, "b_q \mapsfrom q", "\sim"'] \arrow[dr, "b \mapsto M_{\mathcal{B}}(b)"', "\wr"] & \mathcal{Q}(E) \arrow[d, "q \mapsto M_{\mathcal{B}}(q)", "\wr"'] \\ & S_n(\mathbb{K}) \end{tikzcd}$$

où $S_2(E)$ est l'e.v. des formes bilinéaires symétriques sur E.

donc $\dim(\mathcal{Q}(E)) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Ex 13: $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}$ base canonique de $\mathbb{R}^2$.
$M_{\mathcal{B}}(q_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & -2 \end{pmatrix}$ est bien symétrique.

Prop 14: $q \in \mathcal{Q}(E)$ est représentée par un polynôme homogène de degré 2 dans $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$.

Ex 15: $P := X^2 + 2Y^2 + 4YZ \in \mathbb{K}[X,Y,Z]$ représente $q \in \mathcal{Q}(E^3)$,
$q((x,y,z)) = x^2 + 2y^2 + 4yz$.

II - OBJETS ASSOCIÉS À UNE FORME QUADRATIQUE

1) Lien avec l'algèbre linéaire

déf 16: Soit $q \in \mathcal{Q}(E)$. On définit $\dim(q) := \dim(E) = n$.

déf 17: le noyau de $q \in \mathcal{Q}(E)$ est: $\ker(q) := \{x \in E, \forall y \in E, b_q(x,y) = 0\}$

Prop 18: $\forall A \in S_n(\mathbb{K})$, $\ker(q_2) = \ker A$.

déf 19: Soit $A \in S_n(\mathbb{K})$ représentant $q \in \mathcal{Q}(E)$. $\operatorname{rg}(q) := \operatorname{rg}(A)$ est le rang de q.

Rem 20: $\operatorname{rg}(q) = n - \dim(\ker q)$.

Ex 21: $q \in \mathcal{Q}(E^3)$, $q((x,y,z)) = x^2 - 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 6xz$
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ donc $\operatorname{rg}(q) = 2$ et $\ker(q) = \operatorname{Vect}\{(1,1,-1)\}$.

déf 22: $q \in \mathcal{Q}(E)$ est dite non dégénérée si $\ker(q) = \{0\}$.
Sinon, on dit que q est dégénérée.

Ex 23: $A \mapsto \operatorname{tr}(A^2) \in \mathcal{Q}(M_n(\mathbb{K}))$ est non dégénérée.

Prop 24: $q \in \mathcal{Q}(E)$ est non dégénérée ssi $\begin{array}{l} E \to E^* \\ x \mapsto b_q(x,\cdot) \end{array}$ est un isomorphisme d'e.v.

Rem 25: Si q est non dégénérée, on peut donc écrire toute forme linéaire $f \in E^*$ sous la forme $x \mapsto b(a,x)$, pour un unique $a \in E$.

déf 26: Soit $q \in \mathcal{Q}(E)$ non dégénérée. Tout déterminant d'une matrice de $S_n(\mathbb{K})$ représentant q est appelé déterminant de q.
La classe d'équivalence des déterminants de q dans $(\mathbb{K}^*)/(\mathbb{K}^*)^2$ est appelé discriminant de q, et noté $\det(q)$.

2) Isotropie et orthogonalité

déf 27:
- $x \in E$ est dit isotrope pour $q \in \mathcal{Q}(E)$ si $q(x) = 0$.
  Sinon, x est anisotrope.
- $q \in \mathcal{Q}(E)$ est isotrope lorsqu'elle admet un vecteur isotrope non nul. Sinon, elle est anisotrope.

Prop 28: Deux formes quadratiques proportionnelles ont mêmes vecteurs isotropes.

déf 29: On introduit le cône isotrope de $q \in \mathcal{Q}(E)$:
$C_0(q) := \{x \in E, q(x) = 0\}$.

Prop 30 : $\ker(q) \subset C_0(q)$. Réciproque fausse.

C-Ex 31 : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R})$. $\ker A = \{0\}$ mais le cône isotrope est non nul.

Rem 32 : $C_0(q)$ n'est pas un sev de E.

Ex 33 : $q \in Q(E^2)$, $q((x,y)) = xy$. $C_0(q) = (\mathbb{K} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{K})$, qui n'est pas un espace vectoriel.

déf 34 : $x, y \in E$ sont b_q-orthogonaux si $b_q(x,y) = 0$. On note $x \perp y$.

déf 35 : Soient $F, G \subset E$. F et G sont des parties b_q-orthogonales si : $\forall (x,y) \in F \times G$, $b_q(x,y) = 0$. On note $F \perp G$.

déf 36 : Soit $F \subset E$. Le b_q-orthogonal de F dans E est :
$$F^\perp := \{x \in E,\ \forall y \in F,\ x \perp y\}$$

Prop 37 : $F^\perp$ est un sev de E.

Ex 38 : $b_q : (X,Y) \mapsto \mathrm{tr}(XY)$ donne $S_n(\mathbb{K})^\perp = A_n(\mathbb{K})$.

Thm 39 : F sev de E. Si $q \in Q(E)$ est non dégénérée :
$$\dim F^\perp = \dim E - \dim F$$

déf 40 : un sev F de E est dit isotrope si $F \cap F^\perp \neq \{0\}$. Autrement dit, $q_{/F}$ est dégénérée.

Rem 41 : si $F = \mathbb{R}x$, $x \neq 0$, alors : x isotrope ssi V isotrope.

déf 42 : un sev F de E est totalement isotrope si $F \subset F^\perp$, ie $b_{q/F} = 0$.

Rem 43 : un espace admettant un vecteur isotrope n'est pas forcément isotrope.

Ex 44 : $q((x,y)) = x^2 - y^2$. $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \text{ non isotrope} \\ \underset{\in}{(1,1)} \text{ isotrope} \end{cases}$

Prop 45 : si $q \in Q(E)$ non dégénérée et F non isotrope alors : $E = F \oplus F^\perp$.

3) Bases orthogonales et méthode de Gauss

déf 46 : Soit $q \in Q(E)$. Une base B de E est dite q-orthogonale si : $\forall (e,e') \in B^2$, $e \neq e'$, $b_q(e,e') = 0$.

Rem 47 : La matrice de q dans une base q-orthogonale est diagonale.

Thm 48 : Soit $q \in Q(E)$. E admet une base q-orthogonale.

Coro 49 : Soit $A \in S_n(\mathbb{K})$. $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$, ${}^tPAP$ diagonale.

Rem 50 : si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on peut choisir P orthogonale.

App 51 (méthode de Gauss) : écriture de $q \in Q(E)$ comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.

4) Groupe orthogonal

déf 52 : On introduit le groupe orthogonal relativement à $q \in Q(E)$: $O(q) := \{u \in GL(E),\ q \circ u = q\}$.

Rem 53 : $O(q)$ est un sous-groupe de $GL(E)$.

Ex 54 : si $a \in E$ est anisotrope, $x \mapsto x - \dfrac{2 b_q(a,x)}{q(a)} a \in O(q)$.

Ex 55 : si E est euclidien, $O(E) := O(\|\cdot\|_E^2)$.

Rem 56 : B une base de E, $q \in Q(E)$. $O(q)$ s'identifie à $\{M \in GL_n(\mathbb{K}),\ {}^tMAM = A\}$, où $A = \mathrm{Mat}_B(q)$.

Prop 57 : $\forall u \in O(q)$, $\det(u) = \pm 1$.
$SO(q) := \{u \in O(q),\ \det u = 1\}$.

déf 58 : $O(p_1,p_2) := \{M \in GL_n(\mathbb{R}),\ {}^tM I_{p_1,p_2} M = I_{p_1,p_2}\}$
où $I_{p_1,p_2} = \begin{pmatrix} I_{p_1} & 0 \\ 0 & -I_{p_2} \end{pmatrix}$

Prop 59 : $O(p_1,p_2) \simeq O_{p_1} \times O_{p_2} \times \mathbb{R}^{p_1 p_2}$ — DEV 1
où $O_{p_i} := O_{p_i}(\mathbb{R})$.

III - CLASSIFICATION DES FORMES QUADRATIQUES

déf 60 : E, F ev de dimension finie. $q \in Q(E)$, $q' \in Q(F)$. q et q' sont équivalentes s'il existe un isomorphisme $u : E \to F$ tel que $q' \circ u = q$.

1) Classification sur $\mathbb{C}$ $\quad \mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Thm 61 (admis) Soit $q \in Q(E)$. Il existe une base de E $B = (e_1, \dots, e_n)$ telle que : si $x = \sum x_i e_i$, $q(x) = x_1^2 + \dots + x_r^2$ où $r = rg(q)$. Autrement dit : $M_B(q) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Coro 62 : avec les mêmes hypothèses : B est orthonormée ssi $rg(q) = n$ (ie q non dégénérée)

2) Classification sur $\mathbb{R}$ $\quad \mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Thm 63 (Sylvester) (admis) : Soit $q \in Q(E)$. Il existe une base $B = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que : si $x = \sum x_i e_i$, $q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$, où $r = rg(q)$.
Autrement dit, $M_B(q) = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $p \in \mathbb{N}$ ne dépend que de q, et non de B.

déf 64 : La signature de $q \in \mathcal{Q}(E)$ est $\mathrm{sign}(q) := (p, r-p)$.

déf 65 : Soit $q \in \mathcal{Q}(E)$. On dit que q est définie positive si : $\forall x \in E \setminus \{0\}, q(x) > 0$.

Coro 66 : Soit $q \in \mathcal{Q}(E)$. $\begin{cases} q \text{ définie positive} \iff \mathrm{sign}(q) = (n,0) \\ q \text{ non dégénérée} \iff \mathrm{sign}(q) = (p, n-p) \end{cases}$

Ex 67 : $q \in \mathcal{Q}(E^3)$, $q((x,y,z)) = x^2 + 2y^2 + 15z^2 - 4xy + 6xz - 8yz$
$\mathrm{sign}(q) = (2,1)$.

3) Classification sur un corps fini $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{p^m}$, $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$

Lemme 68 : Si $(a,b) \neq (0,0) \in \mathbb{F}_q$, l'équation $ax^2 + by^2 = 1$ a au moins une solution $(x,y) \in (\mathbb{F}_q)^2$.

Thm 69 : Dans $\mathcal{Q}(E)$, il existe deux types de formes quadratiques non dégénérées. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ non carré. Pour toute forme quadratique non dégénérée, il existe une base orthogonale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ telle que $M_{\mathcal{B}}(q)$ soit de la forme
$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \alpha & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Coro 70 : deux formes quadratiques de même dimension sont équivalentes ssi elles ont même rang et même discriminant.

DEV 2

App 71 (Réciprocité quadratique) : Soient p, p' premiers impairs. On a $\left(\frac{p}{p'}\right)\left(\frac{p'}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \times \frac{p'-1}{2}}$ où $\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)$ est le symbole de Legendre.

IV - APPLICATIONS

1) Classification des coniques

déf 72 : Soit $q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^2)$ non nulle. Soit φ une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire euclidien. On appelle conique l'ensemble $C := \{v \in \mathbb{R}^2, q(v) + \varphi(v) = k\}$, $k \in \mathbb{R}$ fixé.

App 73 : Soit C une conique définie par $q(v) + \varphi(v) = k$, non vide et non réduite à un point. Alors :
$\begin{cases} \text{(i) si } \mathrm{sign}(q) = (2,0), \text{ alors } C \text{ est une ellipse} \\ \text{(ii) si } \mathrm{sign}(q) = (1,1), \text{ alors } C \text{ est une hyperbole qui dégénère en deux droites non parallèles} \\ \text{(iii) si } \mathrm{sign}(q) = (1,0), \text{ alors } C \text{ est une parabole qui dégénère soit en une droite, soit en deux droites parallèles.} \end{cases}$

2) Calcul différentiel

Thm 74 (Réduction des formes quadratiques) : Soit $A \in S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$, et $\varphi : M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$, $H \mapsto {}^tHAH$.
Alors il existe $V \subset S_n(\mathbb{R})$ un voisinage de A, et $\psi : V \to GL_n(\mathbb{R})$, $B \mapsto M$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle que : $\forall B \in V, B = {}^tMAM$.

App 75 (Lemme de Morse) : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$, où U est un ouvert contenant 0. On suppose que $df(0) = 0$ et $\mathrm{sign}(d^2f(0)) = (p, n-p)$.
Alors, il existe $\varphi : x \mapsto \varphi(x) := u$ entre deux voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^n$, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que :
$$\begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2 \end{cases}$$

RÉFÉRENCES

- C de SEGUINS PAZZIS, *invitation aux formes quadratiques*
- D. PERRIN, *Cours d'algèbre*
- X. GOURDON, *Algèbre*
- J. GRIFONE, *Algèbre linéaire*
- R. GOBLOT, *Algèbre linéaire*
- F. ROUVIÈRE, *Petit guide de calcul différentiel*