170

Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

Soit K un corps de caractéristique différente de 2.
Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n.

I. Généralités.

1) Formes bilinéaires symétriques

Déf 1 : Une forme bilinéaire symétrique $b : E\times E \to K$ est une application telle que : $\cdot\ \forall x \in E$, $b(x,\cdot) : y \mapsto b(x,y)$, $\forall y \in E$, $b(\cdot,y) : x \mapsto b(x,y)$ sont linéaires
$\cdot\ \forall (x,y)\in E^2$, $b(x,y) = b(y,x)$.

Ex 2 : Soit $A \in \mathcal{S}_m(K)$. $(X,Y) \mapsto {}^tXAY$ est une forme bilinéaire symétrique sur $(K^n)^2$

2) Formes quadratiques

Déf 3 : Soit b une forme bilinéaire sur E. L'application $q : \begin{array}{l} E \to K \\ x \mapsto b(x,x)\end{array}$ est appelée forme quadratique associée à b.
On note $Q(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E
((E,q) est appelé espace quadratique)

Prop 4 : Soit $q \in Q(E)$ associée à b. $\forall \lambda \in K$, $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$ et $b(x,y) = \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right)$ $\forall (x,y)\in E^2$

Cor 5 : La forme bilinéaire symétrique associée à q est unique et appelée forme polaire de q.

Ex 6 : $A \in \mathcal{M}_m(K) \to Tr(A^2)$; $\det : \mathcal{M}_2(K) \to K$ sont des formes quadratiques.

Déf 7 : La matrice associée à q dans une base $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ de E, notée $M_{\mathcal{B}}(q)$ est la matrice symétrique : $(b(e_i,e_j))_{1\leq i,j\leq n}$ où b est la forme polaire de q.

Prop 8 : Soit $q \in Q(E)$ représentée dans $\mathcal{B}$ par A. Alors pour X exprimé dans $\mathcal{B}$, $q(X) = {}^tXAX$

Prop 9 : Soient $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ deux bases de E ; Soit $P = P_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$ (matrice de passage)
Alors : $M_{\mathcal{B}_2}(q) = {}^tP\, M_{\mathcal{B}_1}(q)\, P$

Déf 10 : $q, q' \in Q(E)$ sont équivalentes lorsque $\exists P \in GL_n(K)$, $M(q) = {}^tP M(q') P$ ($M_{\mathcal{B}}(q)$ et $M_{\mathcal{B}}(q')$ sont congruentes)

3) Rang et noyau : [SP]

Déf 11 : $\operatorname{Ker}(q) = \{x \in E, \forall y \in E, b(x,y) = 0\}$ → noyau de q

Rq 12 : C'est un sous-espace vectoriel de E.

Ex 13 : Le noyau de $X \mapsto {}^tXAX$, $A \in \mathcal{S}_n(K)$ est $\operatorname{Ker} A$.

Déf 14 : On appelle rang de q le rang de $M_{\mathcal{B}}(q)$, pour $\mathcal{B}$ une base de E (indépendant du choix de $\mathcal{B}$). On le note $rg(q)$.

Prop 15 : $rg\, q = n - \dim \operatorname{Ker} q$.

Ex 16 : $q : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x^2 - 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 6xz$ est de rang 2 et de noyau $\operatorname{Vect}(1,1,-1)$.

Cor 17 : Deux formes quadratiques équivalentes ont même rang.

Déf 18 : q est non-dégénérée lorsque $\operatorname{Ker} q = \{0\}$.

Ex 19 : $A \in \mathcal{M}_m(K) \mapsto Tr(A^2)$ est non-dégénérée

Prop 20 : q est non dégénérée $\boxed{\text{ssi}}$ $b_q : \begin{array}{l} E \to E^* \\ x \mapsto b(x,\cdot)\end{array}$ est un isomorphisme de K-espace vectoriel

Rq 21 : On a alors : $\forall f \in E^*$, $\exists! a \in E$, $\forall x \in E$, $f(x) = b(a,x)$.

II. Orthogonalité et isotropie

1) Vecteurs et sous-espaces orthogonaux. [SP]

Déf 22 : Soient $x, y \in E$. x est q-orthogonal à y lorsque $b(x,y) = 0$. On note $x \perp_q y$.

Prop 23 : $x \perp_q y \Leftrightarrow q(x+y) = q(x) + q(y)$ (thm de Pythagore)

Déf 24 : Soient $A, B \subseteq E$. A est orthogonal à B lorsque : $\forall x \in A, \forall y \in B$, $x \perp_q y$.

Déf 25 : Soit $A \subseteq E$. On appelle orthogonal de A :
$A^{\perp_q} = \{x \in E / \forall a \in A, x \perp_q a\}$.

Ex 26 : $\forall a \in E$, $\{a\}^{\perp} = \operatorname{Ker} b(\cdot,a)$.

Prop 27 : Si q est non-dégénérée et $A \subseteq E$, alors $\dim A^{\perp_q} = n - \dim A$

2) Isotropie :

Déf 28 : Soient (E,q), (E',q') deux espaces quadratiques.
$u : E \to E'$ est un morphisme métrique lorsque u linéaire et $\forall x \in E$, $q'(u(x)) = q(x)$. Si u est injectif, on dit que c'est une isométrie.

[SP] Déf 29 : $x \in E$ est isotrope lorsque $q(x)=0$; sinon il est anisotrope.
- q est isotrope lorsqu'elle admet un vecteur isotrope non-nul.

Ex 30 : les vecteurs isotropes de $(x,y) \mapsto xy$ sont les éléments de $(K\times\{0\}) \cup \{0\}\times K$.

Déf 31 : On appelle cône isotrope de q : $Co(q) = \{x \in E, q(x)=0\}$.

Rq 32 : $Ker(q) \subset Co(q)$

Ex 33 : (Réciproque fausse) : q représentée par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ a un noyau nul mais un cône isotrope non-nul.

Rq 34 : En général, $Co(q)$ n'est pas un espace vectoriel (cf ex 30)

3) Plans hyperboliques et théorème de Witt : Perrin Serre

On suppose que (E,q) est un espace quadratique non-dégénéré

[P] Déf 35 : (E,q) est un plan hyperbolique lorsque $\dim E = 2$ et $\exists (e_1,e_2)$ base de E telle que : $q(e_1)=q(e_2)=0$ et $b(e_1,e_2)=1$

[P] Prop 36 : Soit $x \in E$ isotrope non-nul. Alors $\exists P$ plan de E contenant x, hyperbolique

Prop 37 : $\exists P_1, \dots, P_r \subseteq E$ plans hyperboliques et F anisotrope tels que $E = (\overset{\perp}{\bigoplus_{i=1}^{r}} H_i) \overset{\perp}{\oplus} F$

Thm 38 (Witt) : Soient (E,q), (E',q') des espaces quadratiques non-dégénérés, soit F sev de E. Soit $u : F \to E'$ morphisme métrique injectif. Alors u se prolonge en une isométrie $\tilde{u} : E \to E'$

Cor 39 : Si F, F' sev de E et sont isométriques alors $F^\perp$ et $(F')^\perp$ sont aussi isométriques

Cor 40 : Le "r" de la décomposition (prop 37) est unique.

4) Bases orthogonales et diagonalisation. [SP]

[SP] Déf 41 : Une famille $(e_1, \dots, e_p)$ de E est dite q-orthogonale lorsque ses vecteurs sont deux à deux q-orthogonaux.

Prop 42 : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m)$ une base de E. Alors
$\mathcal{B}$ q-orthogonale $\Leftrightarrow$ $\Pi_{\mathcal{B}}(q)$ diagonale
$\Leftrightarrow \exists a_1, \dots, a_m \in K$, $q = \sum_{k=1}^{m} a_k (e_k^*)^2$

Ex 43 : La base canonique des matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(K)$ est orthogonale pour $q : A \mapsto tr({}^tAA)$ mais pas pour $A \mapsto tr(A^2)$, $n \geq 2$

Prop 44 : Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille orthogonale de vecteurs anisotropes. Alors elle est libre.

Thm 45 : Tout espace quadratique de dimension finie admet une base orthogonale.

Prop 46 : Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille q-orthogonale de E tq $\forall k$, $q(e_k) \neq 0$. Alors on peut la compléter en une base q-orthogonale de E.

Cas $K = \mathbb{R}$:

Déf 47 : On dit que q est définie positive lorsque $\forall x \in E$, $q(x) > 0$ [SP] p.151

Thm 48 (réduction simultanée) : Soient $q, q' \in Q(E)$, q définie positive. Alors $\exists \mathcal{B}$ base q-orthonormée et q'-orthogonale

App 49 : Théorème de John-Loewner : Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$, $\mathring{K} \neq \emptyset$. Alors il existe un unique ellipsoïde centré en 0, de volume minimal, contenant K. $\boxed{DEV}$ [FGN ...]

5) Méthode de Gauss : [Cog] p 49

Prop 50 : $\exists \phi_1, \dots, \phi_n \in E^*$ linéairement indépendantes, $\exists \beta_1, \dots, \beta_n \in K$ tq : $\forall x \in E$, $q(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \phi_i(x)^2$ et $\forall (x,y) \in E^2$, $b(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \phi_i(x)\phi_i(y)$

↳ Application à la classification des formes quadratiques. [SzP] p80

* K algébriquement clos.

Thm 51 : Si K est algébriquement clos, alors il existe $(n+1)$ classes d'équivalence décrites par les matrices $\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0_{n-r} \end{pmatrix}$ $(0 \leq r \leq n)$.

Cor 52 : Il existe une base orthonormale pour q ssi q est non-dégénérée.

* $K = \mathbb{R}$ p22

Thm 53 : il existe $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ classes d'équivalence décrites par : $\left[\begin{pmatrix} I_s & & \\ & -I_t & \\ & & 0_{n-s-t} \end{pmatrix}\right]$. Le couple (s,t) est appelé signature de q

Thm 54 (inertie de Sylvester). Si $rg\, q = r$ alors $\exists! (s,t) \in \mathbb{N}^2$, $r = s+t$ et pour toute base orthogonale $\mathcal{B}$ de E $\Pi_{\mathcal{B}}(q)$ admet s (respt. t) coefficients >0 (respt. <0). p25

Notions : algèbre linéaire, analyse, géom

* $K = \mathbb{F}_q$: (Car $K \neq 2$)

p83 Thm 55 : Il existe $(n+1)$ classes d'équivalence décrites par $\left[\begin{pmatrix} I_1 & \\ & 0_{n-1}\end{pmatrix}\right.$ et $\begin{pmatrix} I_{1-1} & & \\ & \alpha & \\ & & 0_{n-1}\end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{F}_q^\times / (\mathbb{F}_q^\times)^2$.

p84 Cor 56 : Il existe 2 classes d'équivalence pour les formes quadratiques non-dégénérées.

III – Groupe orthogonal.

1) Isométries

[S&P] Déf 57 : Le groupe orthogonal $O(q)$ est le groupe des isométries de q.

[S&P] p54 Ex 58 : Pour $a \in E$ anisotrope, $q_a : x \mapsto x - \frac{2b(a,x)}{q(a)}a$ est une isométrie (réflexion orthogonale).

p55 Prop 59 : $\forall u \in O(q)$, $\det u = \pm 1$.

p56 Déf 60 : $SO(q) = \{u \in O(q), \det u = 1\}$ = groupe spécial orthogonal

2) Endomorphismes adjoints : (On suppose q non-dégénérée).

[S&P] p64 Déf 61 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'adjoint de u est un endomorphisme $u^* \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant : $\forall (x,y) \in E$, $b(u(x), y) = b(x, u^*(y))$.

Prop 62 : u^* existe et est unique.

Prop 63 : $u \in O(q)$ ssi $u^* \circ u = id$.

3) Cas euclidien :

Prop 64 : Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{B}$ orthonormale. Alors $\mathcal{B}'$ orthonormale ssi ${}^tP_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = I_n$

Thm 65 (spectral). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique ($u^* = u$). Alors u admet une base de vecteurs propres orthonormée.

Thm 66 (réduction d'endomorphismes orthogonaux). Soit $u \in O(q)$ $\exists p, q \in \mathbb{N}$, $\exists \theta_1, \dots, \theta_r \in]0, \pi[$ tels que dans une base orthonormée $\mathcal{B}$: $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & & \\ & & R(\theta_1) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R(\theta_r)\end{pmatrix}$

avec $R(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\end{pmatrix}$

p, q ne dépendent pas du choix de $\mathcal{B}$, les θ_i non plus (à l'ordre près).

IV – Applications

1) Extremums : $E = \mathbb{R}^n$

Soit U un ouvert de E.

Thm 67 (Schwarz) : Soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ deux fois différentiable en $a \in U$. alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$, $\forall 1 \leq i,j \leq n$. [Rou] p334

i.e : $D^2 f(a)$ est une application bilinéaire symétrique

Thm 68 : Si f admet un minimum local en a et $D^2 f(a)$ existe, alors $Df(a) = 0$ et $h \mapsto D^2 f(a)(h,h) \geq 0$ [Rou] p339

• Si $Df(a) = 0$ et $h \mapsto D^2 f(a)(h,h) > 0$ alors f admet un minimum local strict en a.

2) Lemme de Morse.

Lemme 69 (réduction des formes quadratiques).

Soit $A_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$. $\exists$ V voisinage de A_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\rho : V \to GL_n(\mathbb{R})$ $\mathcal{C}^1$ telle que : $\forall A \in V$, $A = {}^t\rho(A) A_0 \rho(A)$ [Rou] p338

Thm 70 (Lemme de Morse) : Soit $f : U \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^3$, U ouvert de $\mathbb{R}^n$ tq $0 \in U$. Hyp : $Df(0) = 0$ et $D^2 f(0)$ non-dégénérée, de signature $(p, n-p)$. Alors $\exists \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme entre deux voisinages de 0 telle que $\varphi(0) = 0$ et [Rou] p354

$f(x) - f(0) = \varphi_1(x)^2 + \dots + \varphi_p(x)^2 - \varphi_{p+1}(x)^2 - \dots - \varphi_n(x)^2$

3) Théorème de Liapounov. DEV

Thm 71 : Soit le système différentiel $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = x \end{cases}$ avec $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, de classe $\mathcal{C}^1$, $f(0) = 0$. Si $Df(0)$ a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative, alors 0 est un point d'équilibre attractif : [Rou] p143

$\forall x$ proche de 0, $y(t)$ tend exponentiellement vers 0 lorsque $t \to +\infty$

l'ev espace carac est un sev stable par A.

* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ e^A est-il toujours un polynôme en A?

$\boxed{\text{Oui}}$ $\mathbb{C}[A]$ de dim finie

Seguin Pazzis invitat° aux formes quadratique

Spirglas.

Perrin

Serre

Rau

* Différentes formes de formes quadratiques sur $\mathbb{R}^2$

$q(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$ et les $O(q)$

$q(x_1,x_2) = x_1^2 - x_2^2$

$q(x_1,x_2) = x_1^2$ et $\varnothing$.

* Connaissez vous des FQ dont le groupe orthogonal est compact.

* lien entre diagonalisation de S_n et existence base orthogonale pour q.

* SQ. q de sign (p,q) $\begin{matrix} p \neq 0 \\ q \neq 0 \end{matrix}$

alors $O(q)$ non compact

* $\underline{\text{Mq}}$ $q|_F$ non dégénérée $\Rightarrow$ $E = F \oplus F^\perp$

* Donner sur $\mathbb{R}^2$ une forme quadratique qui admet 1 base orthogonale mais pas de base orthonormale.

$O(1,1)$?

* $S_2(\mathbb{R})$ structure? - ev sur $\mathbb{R}$ de dim 3

$SL_2(\mathbb{R})$ $f_g : S_2 \to S_2$ $g \in SL_2(\mathbb{R})$

$S \mapsto g S {}^t g$

$\underline{\text{Calder}}$

isomorphisme

f_g préserve le det qui est une forme quad.

$f_g \in O(q)$ pour q le det