170 — Forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications

GOURDON, algb | GRIFONE, algb lin | X-ENS* algb 3 | PERRIN cours d'algb | GOURDON anal | ROUVIÈRE* pgcd

Soit K corps commutatif et E un K-espace vectoriel de dimension n finie.

I Généralités

[GOU alg] chap 5.

1) Forme bilinéaire symétrique, forme quadratique

Def 1. Soit E un K-espace vectoriel, $\varphi : E\times E \to K$. On dit que φ est bilinéaire si : $\forall (x,y)\in E^2$ $\varphi(\cdot,y)$ et $\varphi(x,\cdot)$ sont linéaires

• Si de plus φ vérifie : $\forall (x,y)\in E^2$, $\varphi(x,y)=\varphi(y,x)$ alors φ est dite symétrique.

Ex 2. – $\varphi_1(x,y)=x\cdot y$ pour • produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$

– $\varphi_2(A,B)=\mathrm{tr}({}^tAB)$ pour $A,B\in\mathcal{M}_n(K)$

Def 3. On suppose que K n'est pas de caractéristique 2. On appelle forme quadratique sur E toute application q telle que :

$$q : \begin{array}{l} E\to K \\ x\mapsto \varphi(x,x)\end{array}$$ où φ est une forme bilinéaire symétrique sur E.

Ex 4: en reprenant l'ex ②

– $q_1(x)=\|x\|^2$ et $q_2(A)=\mathrm{tr}({}^tAA)$

Prop 5. Soit q forme quadratique sur E. Alors il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ telle que : $\forall x\in E$ $q(x)=\varphi(x,x)$.
La forme bilinéaire φ s'appelle la forme polaire de q, et on a :

$$\forall (x,y)\in E^2 \quad \varphi(x,y)=\frac{1}{2}\big(q(x+y)-q(x)-q(y)\big) = \frac{1}{4}\big(q(x+y)-q(x-y)\big)$$

On a donc une correspondance bijective entre les formes bilinéaires symétriques et les formes quadratiques.

Ex 6. Dans ④, φ_1 et φ_2 sont les formes polaires de q_1 et q_2

2) Expression matricielle

Soit E de dimension $n<\infty$, et $\mathcal{B}=\{e_1,\dots,e_n\}$ une base de E. Alors, pour $x=\sum x_ie_i$ et $y=\sum y_ie_i$, on a

$$\varphi(x,y)=\sum_{i,j} x_iy_j\,\varphi(e_i,e_j) = {}^tXMY$$ où

$X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$ et $M=(\varphi(e_i,e_j))_{1\le i,j\le n}\in\mathcal{M}_n(K)$

On dit que M est la matrice de φ dans $\mathcal{B}$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$

Rmq 7. L'application $\varphi\mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}=\{$forme bilinéaire symétrique$\}$ dans $\{$matrice symétrique$\}:=\mathcal{S}_n$

Cor 8. On a donc $\dim\mathcal{S}=\dim\mathcal{S}_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

Thm 9. (changement de base)
Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $P=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Soit φ forme bilinéaire symétrique (f.b.s) sur E alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi)={}^tP\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)\,P$$

On dit alors que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ sont congrues.

Def 10. Soit q forme quadratique (f.q.) sur E et $\mathcal{B}$ base de E.
On appelle matrice de q dans $\mathcal{B}$ la matrice de sa forme polaire associée dans $\mathcal{B}$.

Ex 11: Soit $q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ tq $q(x,y,z)=3x^2+y^2+2xy-3xz$

Alors, $\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(q)=\begin{pmatrix}3 & 1 & -3/2\\ 1 & 1 & 0\\ -3/2 & 0 & 0\end{pmatrix}$

3) Rang et noyau d'une forme quadratique

[GRI] chap 9.1

Def 11. Grâce au thm ⑧, on peut définir le rang d'une f.b.s. comme le rang de sa matrice dans une base quelconque de E :

$$\mathrm{rg}(\varphi)=\mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi))$$

• On dit que φ est non dégénérée si $\mathrm{rg}(\varphi)=n=\dim E$.
ie si $\det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi))\neq 0$ (ça ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$)

Def 12. On appelle noyau de φ, noté $N(\varphi)$, l'ensemble

$$N(\varphi)=\{y\in E \mid \varphi(x,y)=0 \ \forall x\in E\}$$

C'est aussi le noyau de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ pour $\mathcal{B}$ base quelconque.

Prop 13. On a $\dim E=\mathrm{rg}\,\varphi+\dim(N(\varphi))$

En particulier, φ est non-dégénérée ssi $N(\varphi)=\{0\}$

9.4

Def 14. On définit le rang et le noyau d'une forme quadratique q comme ceux de sa forme polaire φ. De plus, q est non dégénérée si φ est non-dégénérée.

• On dit que q est définie si : $q(x)=0 \iff x=0$

Prop 15. q est définie $\Rightarrow$ q est non dégénérée

Ex 16: Dans l'ex ⑪, q est non dégénérée mais non définie car $q(0,0,1)=0$.

• Sur $\mathbb{C}^3$, $q: x,y,z\mapsto x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$

$\mathrm{Mat}(q)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ est dégénérée, avec $N(q)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$

II Orthogonalité et isotropie

1) Orthogonalité

[GOU] chap 5.1.2

Soit q forme quadratique et φ sa forme polaire associée.

<u>Def 17</u>: Deux vecteurs x et y de E sont <u>orthogonaux pour q (ou φ)</u> si $\varphi(x,y)=0$ (équivalent à $\varphi(y,x)=0$). On note $x \perp y$

- Soit $A \subset E$. On appelle <u>orthogonal de A selon q (ou φ)</u> l'ensemble
$$A^\perp = \{ y \in E \mid \forall x \in A,\ \varphi(x,y)=0 \}$$
- Deux sous-ensemble de E, A et B, sont dits <u>orthogonaux</u> si $\forall x \in A$ $\forall y \in B$, $\varphi(x,y)=0$. On note $A \perp B$.

<u>Prop 18</u>. Si $A \subset E$, alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E, avec $A^\perp = (\mathrm{Vect}\,A)^\perp$

<u>Rmq 19</u>: On parle d'orthogonalité au sens de q. (un peu + loin)

- $F \subset E \Rightarrow F \subset F^{\perp\perp}$
- $A \subset B \subset E \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$

<u>Rmq 20</u>: On a $N(q) = E^\perp$

<u>Prop 21</u>: Soit F sous-espace vectoriel de E. Alors:

- $\dim F + \dim F^\perp = \dim E + \dim(F \cap N(q))$
- $F^{\perp\perp} = F + N(q)$, en particulier si q est non dégénérée on a $F = F^{\perp\perp}$
- si $q_{|F}$ est une forme quadratique définie sur F, on a $F \oplus F^\perp = E$

2) Isotropie

à nouveau 5.1.2

<u>Def 22</u>. On appelle <u>cône isotrope</u> de q l'ensemble $C_q = \{x \in E \mid q(x)=0\}$

- Un vecteur x est <u>isotrope</u> (pour q) si $x \in C_q$.

<u>Rmq 23</u>. On a : q définie $\Leftrightarrow C_q = \{0\}$

[GRi] 9.4

<u>Prop 24</u>. On a $N(q) \subset C_q$, mais la réciproque est fausse.

<u>C-Ex 25</u>.

- $E = \mathbb{R}^2$, $q((x,y)) = x^2 - y^2$, $C_q = \{y = \pm x\}$, $N_q = \{0\}$
- $E = \mathbb{R}^3$, $q\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = x^2+y^2-z^2$, $C_q = \{z = \pm\sqrt{x^2+y^2}\}$, $N_q = \{0\}$

cf Annexe.

9.3

<u>Def 26</u>. Un sous-espace vectoriel F est dit <u>isotrope</u> si $F \cap F^\perp \neq \{0\}$

<u>Ex 27</u>: Si $C_q \neq \{0\}$, les droites vectorielles engendrées par les vecteurs isotropes sont isotropes.

<u>Prop 28</u>: Il existe des espaces isotropes ssi $C_q \neq \{0\}$

<u>Thm 29</u>: $E = F \oplus F^\perp \Leftrightarrow F$ est non isotrope

<u>Ex 30</u>. Soit $q : \begin{array}{l} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ A \mapsto \det(A) \end{array}$. On a q non-dégénérée et $C_q = \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \setminus GL_2(\mathbb{R})$

De plus, $F := \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(A) = 0\}$ et $F^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

Donc F est non isotrope, ie $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = F \oplus F^\perp$

3) Bases orthogonales et réduction simultanée

[GOU] 5.

<u>Def 31</u>: Une base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de E est dite <u>q-orthogonale</u> si : $\forall (e_i, e_j) \in \mathcal{B}^2$, $i \neq j \Rightarrow \varphi(e_i, e_j) = 0$

Donc, pour tout $x = \sum x_i e_i \in E$, $q(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 q(e_i)$

donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$ est diagonale. Elle est orthonormée si $\varphi(e_i, e_j) = \delta_{ij}$

<u>Thm 32</u>. Il existe toujours une base q-orthogonale de E.

[GRi] 9.6

<u>Appli 33</u>: Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que ${}^tA = A$. Alors A est diagonalisable.

<u>Méthode de GAUSS</u> Pour toute forme quadratique q, il existe $r = rg(q)$ formes linéaires indépendantes $\ell_1, \dots, \ell_r$ telles que $q = \sum_{i=1}^{r} a_i (\ell_i)^2$, $a_i \in K$. Cela permet de trouver des bases q-orthogonales

<u>Ex 34</u>: $q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 + 3y^2 + 7z^2 + 2xy + 8yz = (\underbrace{x+y}_{x'})^2 + 2(\underbrace{y+2z}_{y'})^2 - \underbrace{z}_{z'}^2$

$P = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base orthogonale pour q.

Car si on note $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ on a $q(X) = {}^tX \underbrace{\mathrm{Mat}_{can}(q)}_{M} X = {}^tX' \underbrace{{}^tPMP}_{\text{diagonale}} X'$

donc on doit exprimer x, y, z en fonction de x', y', z'

<u>Rm 35</u>. Dans la réduction de Gauss, on utilise

$\ell_1 \ell_2 = \frac{1}{4}\left[(\ell_1+\ell_2)^2 - (\ell_1-\ell_2)^2\right]$ et $xy + xa + yb = \underbrace{(x+b)}_{\ell_1}\underbrace{(y+a)}_{\ell_2} - ab$

[GRi] 9.10

<u>Prop 36</u>: Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et q f.q. sur E. Il existe alors des bases qui sont orthogonales à la fois pour q et pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$, ie $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ et D diagonale tq $\mathrm{Mat}_{can}(\langle\cdot,\cdot\rangle) = {}^tPP$ et $\mathrm{Mat}_{can}(q) = {}^tPDP$. En particulier, si $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est le produit scalaire canonique, on a $P \in O_n(\mathbb{R})$.

[X-ENS] 3.31 et 3.37

<u>Appli 37</u>: Convexité logarithmique du déterminant $\boxed{\text{DVP}}$

Soit A, B dans $\mathcal{S}_n^{++} = \{$matrices symétriques réelles définies positives$\}$

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha + \beta = 1$. Alors

$$\det(\alpha A + \beta B) \geq (\det A)^\alpha (\det B)^\beta$$

<u>Appli 38</u>: Ellipsoïde de John-Loewner

Soit K compact non vide de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe un unique ellipsoïde centré en O de volume minimal contenant K

[PER] V.6 p124

III Classification des formes quadratiques

→ Le problème de la classification consiste à trouver des classes d'équivalence pour la relation ~ (et les caractériser par des invariants)
$(\varphi \sim \varphi' \Leftrightarrow) q \sim q' \Leftrightarrow \exists\, u \in GL(E)$ tq
$\forall x, y \in E \quad \varphi'(x,y) = \varphi(u(x), u(y))$

On dit dans ce cas que φ et φ' sont équivalentes. Matriciellement cela revient à dire que $Mat_{can}(\varphi)$ et $Mat_{can}(\varphi')$ sont congrues.

[GRI] 9.8

Sur $\mathbb{R}$: Soit $E \simeq \mathbb{R}^n$ et q f.q sur E

Thm 39 : (SYLVESTER) Il existe une base $\{e_i\}$ de E tq
$Mat(q)_{e_i} = \begin{pmatrix} A & 0 & \\ 0 & B & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ où $A = I_p$, $B = -I_{r-p}$ avec $r = rg(q)$

On appelle signature le couple $(p, r-p)$ (indépendant de la base).

[PER] V.6, p128

Cor 40 :
- q est définie $\Leftrightarrow sgn(q) = (n,0)$ ou $(0,n)$ (ie $C_q = \{0\}$)
- q est non dégénérée $\Leftrightarrow sgn(q) = (p, n-p)$ (ie $N_q = \{0\}$)

Csq 41 : Il y a $n+1$ classes d'équivalences de f.q. non dégénérées.

Sur un corps algébriquement clos : Soit $E \simeq K^n$ et q f.q. sur E

[GRI] 9.7

Thm 42 : Il existe une base $\{e_i\}$ tq $q(x) = x_1^2 + \dots + x_r^2$ $(r = rg(q))$
ie $Mat_{e_i}(q) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Cor 43 : • q est non dégénérée $\Leftrightarrow rg(q) = n \Leftrightarrow \exists \{e_i\}$ q-orthonormée

Csq 44 : Il existe une unique classe d'équivalence de f.q. non dégénérée

[PER] V.6 p130

Sur un corps fini : Soit $k = \mathbb{F}_q$ de caractéristique $p \neq 2$, $E \simeq k^n$

Thm 45 : Soit $\alpha \in \mathbb{F}_q^* \setminus \mathbb{F}_q^{*2}$ ie non carré. Il y a deux classes d'équivalences de formes quadratiques non dégénérées sur E, représentées par $Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ et $Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha \end{pmatrix}$.

Rmq 46 : Ce théorème s'appuie sur le lemme :
L'équation $ax^2 + by^2 = 1$ avec $a, b \in \mathbb{F}_q^*$ a des solutions $x, y \in \mathbb{F}_q$

Ex 47 : on reprend l'ex 34 et 25.
$sgn(q_{25}) = (2,1)$ donc $rg(q) = 3$
$sgn(q_{34}) = (2,1)$
} elles sont équivalentes

[GOU an] V.2

IV Application à l'analyse

Thm 48 : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 tq $Df_a = 0$ pour un $a \in U$ de sorte que $f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2} Q(h) + o(\|h\|^2)$
où Q est la forme quadratique : $Q(h) = \sum_{i \neq j} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$
Alors :
i) Si f admet un maximum (resp. minimum) relatif en a, alors Q est une forme quadratique définie négative (resp. positive), ie Q est définie et : $\forall x \in \mathbb{R}^n \; Q(x) \leq 0$ (resp. $Q(x) \geq 0$).
ii) Si Q est une forme quadratique définie $(\oplus, \ominus)$ alors f admet un extremum en a (min, max).

La matrice de Q, notée $A = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{i,j}$, est la hessienne de f

Csq : L'étude des formes quadratiques permet de chercher des extrema locaux.

Ex 49 : (en dimension 2)
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^2 tq $Df_a = 0$ pour $a \in U$. On note
$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$. Alors si $rt - s^2$ est :
- ... > 0 et $r > 0$, f admet un minimum relatif en a
- ... > 0 et $r < 0$, f admet un maximum relatif en a
- ... < 0, f n'a pas d'extremum en a
- ... $= 0$ on ne peut pas conclure.

DVP

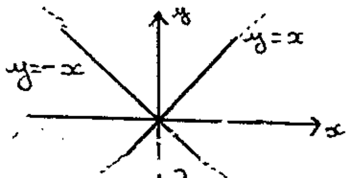
[ROU] ex 66 et 114

Thm 50 : réduction des formes quadratiques, version différentielle
Soit $A_0 \in S_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$ et $\varphi : M_n(\mathbb{R}) \to S_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto {}^tMA_0M$. Alors il existe $V \subset S_n$ voisinage de A_0 et $\psi : V \to GL_n(\mathbb{R})$ de classe C^1 tq $\forall A \in V \quad A = {}^t\psi(A) A_0 \psi(A)$, ie toute forme quadratique suffisamment voisine d'une forme quadratique non dégénérée lui est équivalente.

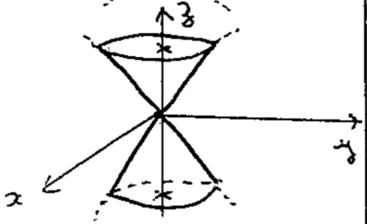
Appli 51 : Lemme de Morse
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^3, $U \ni 0$ ouvert. On suppose que $Df(0) = 0$ et $Df^2(0)$ est de signature $(p, n-p)$. Alors il existe $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = u$ entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$, C^1, tq $\varphi(0) = 0$ et
$f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_n^2$

Annexe :

- C-ex 25 : $E = \mathbb{R}^2$, $q(x,y) = x^2 - y^2$,
  $C_q = \{y = \pm x\}$



$E = \mathbb{R}^3$, $q(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$
$C_q = \{z = \pm\sqrt{x^2+y^2}\}$



Références :

- GOURDON algèbre : I 1), I 2)
  II 1), II 3)
- GRIFONE algèbre linéaire : I 3)
  II 2), II 3)
  III
- PERRIN cours d'algèbre : III
- GOURDON analyse : IV
- ROUVIÈRE petit guide du calcul différentiel : IV
  $\boxed{\text{dvp 2}}$
- FRANCINOU-GIANELLA-NICOLAS oraux X-ENS algèbre 3 : $\boxed{\text{dvp 1}}$

Lemme de Morse

Joubaud Maud et Jochault Bastien

25 Mars 2015

Lemme de Morse : *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^{\kappa} \longrightarrow \mathbb{R}$ C^3, avec $0 \in U$ ouvert. On suppose que $Df(0) = 0$ et $Df^2(0)$ est de signature $(p, n-p)$.*
Alors il existe $\phi : x \longrightarrow \phi(x) = u$ entre deux voisinages V et W de 0 dans $\mathbb{R}^n$, C^1 tel que $\phi(0) = 0$ et *$\forall x \in V$ $f(x) - f(0) = \sum_{i=1}^{p} u_i - \sum_{i=p+1}^{n} u_i$* où *$u = \phi(x)$.*

On utilisera le lemme suivant :
Lemme : *Soit S l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille n. Soit $A_0 \in S$ inversible et $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S$ avec $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\phi(M) = M^T A_0 M$. Alors il existe $V \subset S$ voisinage de A_0* et *$\psi : V \longrightarrow GL_n(\mathcal{R})$ de classe C^1 tel que : $\forall A \in V$ $A = \psi(A)^T A_0 \psi(A)$, c'est à dire que toute forme quadratique assez proche de la forme quadratique non dégénérée A_0 est équivalente à A_0 "de manière C^1 ".*

Preuve du lemme : Soit τ l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans S définie par $\tau(M) = M^T A_0 M$.
On cherche à déterminer le noyau de $D\tau(I)$, où I est la matrice identité.
On a, pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:
$\tau(I+H) - \tau(I) = (I+H)^T A_0 (I+H) - A_0 = H^T A_0 + A_0 H + H^T A_0 H$
Ainsi $D\tau(I).H = H^T A_0 + A_0 H$.
D'où, comme A_0 est symétrique $D\tau(I).H = 0 \iff A_0 H$ antisymétrique.

Notons $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = (AM)^T\}$, on a clairement F supplémentaire de $KerD\tau(I)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Comme A_0 est symétrique on a $I \in F$. On note $\tilde{\tau} : F \longrightarrow S$ la restriction de τ à F. On a alors $D\tilde{\tau}(I) : F \longrightarrow S$ où F et S de même dimension finie (par le théorème du rang sur $D\tau(I)$).
De plus, $KerD\tilde{\tau}(I) = KerD\tau(I) \cap F = \{0\}$, $D\tilde{\tau}(I)$ est donc injective, et par conséquent bijective par un argument de dimension.

On a alors :
- $\tilde{\tau} : F \longrightarrow S$ C^1 où $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et S sont deux Banach et F ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- $D\tilde{\tau}(I)$ est un isomorphisme bicontinu (application linéaire de dimension finie).

Par le Théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert U de I (on peut supposer $U \subset GL_n(\mathbb{R})$) tel qUe $\tilde{\tau}$ soit un C^1-difféomorphisme de U sur

$V = \tilde{\tau}(U)$. Ainsi, V est un voisinage de $\tilde{\tau}(I) = \tau(I) = A_0$, et l'application $\tilde{\tau}^{-1}$ fournit le difféomorphisme voulu.

□

Preuve du Lemme de Morse : f étant C^3 on peut écrire, par La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + DF(0)(x) + \int_0^1 (1-t) D^2 f(tx)(x) dt \\ &= f(0) + \int_0^1 (1-t) D^2 f(tx)(x) dt \\ &= f(0) + x^T Q(x) x \end{aligned}$$

où $Q(x) = \int_0^1 (1-t) D^2 f(tx) dt$.
On a $Q(0) = \int_0^1 (1-t) D^2 f(0) dt = \frac{1}{2} D^2 f(0)$, ce qui assure que $Q(0)$ est symétrique inversible (en effet $D^2 f(0)$ non-dégénérée), avec Q C^1 (car f C^3).
Par le lemme il existe un voisinage V' et une application ψ de classe C^1 sur $Q(V)$ à valeurs dans $Gl_n(\mathbb{R})$ telle que :
$\forall x \in V' \quad Q(x) = (\psi \circ Q(x))^T Q(0) (\psi \circ Q(x))$
On note dans la suite $M = \psi \circ Q$.

On a $Q(0)$ de signature $(p, n-p)$.
Par conséquent, en utilisant le théorème des réduction des formes quadratiques sur $\mathbb{R}$, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R}))$ telle que :
$\forall u \in \mathbb{R}^n \quad u^T P^T Q(0) P u = u_1^2 + ... + u_p^2 - u_{p+1}^2 - ... - u_n^2$
On peut finalement écrire :

$$\begin{aligned} \forall x \in V' \quad f(x) - f(0) &= (P^{-1} M(x) x)^T P^T Q(0) P (P^{-1} M(x) x) \\ &= u_1^2 + ... + u_p^2 - u_{p+1}^2 - ... - u_n^2 \end{aligned}$$

avec $u = P^{-1} M(x)$. La fonction $\phi : x \longmapsto P^{-1} M(x) x$ est C^1 et vérifie $\phi(0) = 0$.
Pour montrer que cette application est un C^1-difféomorphisme entre deux voisinages de 0, on utilise le théorème d'inversion locale, il faut donc montrer que $D\phi(0) = P^{-1} M(0)$ est inversible :

$$\begin{aligned} \forall h \in V' \quad \phi(h) - \phi(0) &= P^{-1} M(h).h \\ &= P^{-1}(M(h) - M(0)).h + P^{-1} M(0).h \end{aligned}$$

Or $P^{-1}(M(h) - M(0)).h$ tend vers 0 quand h tend vers 0. D'où $D\phi(0) = P^{-1} M(0)$ inversible, ce qui conclut la démonstration.

Références

[1] François Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel : A l'usage de la licence et de l'agrégation*, CASSINI : exercice 66 et 114.

Ellispoïde de John-Loewner

Joubaud Maud et Jochault Bastien

25 Mars 2015

Théorème : *Soit K un compact d'intérérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe un unique ellispoïde centré en 0 de volume minimal contenant K.*

On commencera par montrer le lemme suivant :
Lemme : *Soient A,B dans $\mathcal{S}_n^{++}$ l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives, soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha + \beta = 1$. Alors* $\det(\alpha A + \beta B) \geqslant (\det A)^\alpha (\det B)^\beta$. *De plus si $\alpha \in]0,1[$ et $A \neq B$ l'inégalité est stricte.*

Preuve du lemme : Par le théorème de réduction simultanée, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ telles que $A = PP^T$, $B = PDP^T$ et $\forall i \in \{1, .., n\} \lambda_i > 0$ (car B inversible). On a $\det(\alpha A + (1-\alpha)B) = (\det P)^2 \det(\alpha I_n + (1-\alpha)D)$ et $(\det A)^\alpha (\det B)^{1-\alpha} = (detP)^2 (\det D)^{1-\alpha}$; on est donc ramené au cas $A = I_n$ et $B = D$.

On a :
- $\det(\alpha I_n + (1-\alpha)D) = \Pi_{i=1}^n (\alpha + (1-\alpha)\lambda_i)$
- $(detD)^{1-\alpha} = \Pi_{i=1}^n \lambda_i^{1-\alpha}$

Par convexité du logarithme on a, pour tout i, $\ln(\alpha + (1-\alpha)\lambda_i) \geqslant \alpha \ln(1) + (1-\alpha)\ln(\lambda_i) = (1-\alpha)\ln(\lambda_i)$. D'où $\sum_{i=1}^n \ln(\alpha + (1-\alpha)\lambda_i) \geqslant \sum_{i=1}^n (1-\alpha)\ln(\lambda_i)$, et en passant à l'exponentielle à l'inégalité voulue. Si $\alpha \in]0,1[$ et $A \neq B$; amprS p, un des λ_i est différent de 1 et par stricte concavité du logarithme l'inégalité est stricte.

□

Preuve du théorème : Prouvons d'abord l'existence de cet ellipsoïde.
Un ellipsoïde est défini par $\{x \in \mathbb{R}^n | q(x) \leqslant 1\}$ où q est une forme quadratique définie positive. On notera Q l'ensemble des formes quadratiques, Q^+ l'ensembles des formes quadratiques positives et Q^{++} l'ensemble des formes quadratiques définies positives. On note $\mathcal{E}_q = \{x \in \mathbb{R}^n | q(x) \leqslant 1\}$ l'ellipsoïde associée.
Dans une base orthonormée adaptée, q s'écrit $q(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2$ avec $a_i > 0$. Le volume de $\mathcal{E}_q$ est donnée par :
$\text{Vol}(\mathcal{E}_q) = \int_{\sum_{i=1}^n a_i x_i^2 \leqslant 1} dx_1 ... dx_n$
On pose le changement de variable $y_i = \sqrt{a_i} x_i$, de jacobien $\frac{1}{\sqrt{A_1 ... a_n}}$. Si on note $D(q) = a_1 ... a_n$ on a alors :

$\text{Vol}(\mathcal{E}_q) = \int_{\sum_{i=1}^n y_i^2 \leqslant 1} \frac{1}{\sqrt{D(q)}} dy_1 ... dy_n = \frac{V_0}{\sqrt{D(q)}}$ avec V_0 le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$.
Minimiser le volume revient donc à maximiser $D(q)$ pour $q \in Q^{++}$ tel que $\forall x \in K \quad q(x) \leqslant 1$.

On va d'abord maximiser $D(q)$ sur l'ensemble plus grand $\mathcal{A} = \{q \in Q^+ | \forall x \in K, q(x) \leqslant 1\}$. On munit Q de la norme $N(q) = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |q(x)|$. On va montrer que $\mathcal{A}$ est un compact convexe et non vide de Q. Comme Q est un $\mathbb{R}$-espace normé de dimension finie, on montrera que $\mathcal{A}$ est fermé et borné pour prouver qu'il est compact.

Convexe : Soit $q, \tilde{q} \in \mathcal{A}$ et $t \in [0,1]$. $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad (tq + (1-t)\tilde{q})(x) = tq(x) + (1-t)\tilde{q}(x) \geqslant 0$.
Or $\forall x \in K \quad (tq + (1-t)\tilde{q})(x) = tq(x) + (1-t)\tilde{q}(x) \leqslant t + (1-t) = 1$ donc $tq + (1-t)\tilde{q} \in \mathcal{A}$.

Fermé : Soit $(q_n)_n \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ où $(q_n)_n$ converge vers $q \in Q$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\|q(x) - q_n(x)\| \leqslant N(q - q_n)\|x\|$ donc $(q_n(x))_n$ tend vers $q(x)$. En particulier, $q(x) = \lim q_n(x) \geqslant 0$, et si $x \in K$, $q(x) = \lim q_n(x) \leqslant 1$.

Borné : Comme K est d'intérieur non vide, pour $a \in K$ il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset K$.
Soit $q \in \mathcal{A}$, pour tout x tel que $\|x\| \leqslant r$, on a $a + x \in K$ et donc $q(x + a) \leqslant 1$.
De plus $q(-a) = q(a) \leqslant 1$, donc, par l'inégalité de Minkowski :
$\sqrt{q(x)} = \sqrt{q(x + a - a)} \leqslant \sqrt{q(x + a)} + \sqrt{-a} \leqslant 2$.
On a donc $q(x) \leqslant 4$. Prenons maintenant x tel que $\|x\| \leqslant 1$, on a alors $q(x) = \frac{1}{r^2} q(rx) \leqslant \frac{4}{r^2}$.
Finalement on a $N(q) \leqslant \frac{4}{r^2}$ donc $\mathcal{A}$ est borné.

Non-vide : Notons que K est borné en tant que compact. Soit M tel que $\forall x \in K \|x\| \leqslant M$.
On pose alors $q_1(x) = \frac{\|x\|^2}{M}$, on a clairement $q_1 \in \mathcal{A}$

Comme D est continue sur le compact non-vide $\mathcal{A}$ il atteint un maximum en q_0. On a alors $D(q_0) \geqslant D(q_1) > 0$ donc $q_0$est définie positive. D'où l'ellipsoïde $\mathcal{E}_{q_0}$ convient.

Montrons maintenant l'unicité de cet ellipsoïde.
Supposons par l'absurde qu'il existe une forme quadratique défi,ie positive $q \neq q_0$ tel que $D(q) = D(q_0)$. Soit S et S_0 les matrices symétriques définies positives représentant respectivement q et q_0 dans une base orthonormée. Par convexité de $\mathcal{A}$ on a $\frac{1}{2}(q + q_0) \in \mathcal{A}$, donc, par le lemme :
$D(\frac{1}{2}(q + q_0)) = \det(\frac{1}{2}(S + S_0)) > (\det S_0)^{\frac{1}{2}} (\det S)^{\frac{1}{2}} = \det S_0 = D(q_0)$, ce qui

contredit le caractère maximal de $D(q_0)$.

Références

[1] Francinou - Gianella - Nicolas, *Oraux X-ENS, algèbre 3*, 3-31 et 3-37