162 — Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

Cadre : On se place sur $\mathbb{R}$.

I) Généralités sur les systèmes linéaires.

1) Définitions.

[GR] p37 et 141

Def 1 : On appelle système d'équations linéaires un système du type :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \dots + a_{pn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

où les a_{ij} et $b_i \in \mathbb{R}$ sont donnés. On appelle solution tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ dont les x_i vérifient toutes les équations.
Le système est dit compatible s'il admet au moins une solution.

Ex 2 : ① $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ compatible ② $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$ non compatible

[GR] p142

Expression matricielle : Pour $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq p,\, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, le système (1) peut s'écrire sous la forme $AX = B$.
On appelle rang du système le rang de A.

Prop 3 : En notant $(C_1, \dots, C_n)$ les colonnes de A, on a : le système $AX = B$ est compatible ssi $B \in \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_n)$

Ex 4 : ① $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ compatible $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ non compatible.

2) Système de Cramer.

[GR] p143

Def 5 : On appelle système de Cramer un système linéaire dont la matrice carrée A est inversible.

Prop 6 : Un système de Cramer admet toujours une unique solution donnée par $X = A^{-1}B$.

Thm 7 (de Cramer) : L'unique solution d'un système de Cramer est donnée par : $x_i = \dfrac{\det(C_1, \dots, C_{i-1}, B, C_{i+1}, \dots, C_n)}{\det A}$.

Ex 8 : $\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 7 \\ x + 2y - 4z = 3 \\ 3x - 4y - 6z = 5 \end{cases}$ on a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

[CIA] p80

Complexité : requiert de l'ordre de $(n+2)!$ opérations.

3) Le cas général

[GR] p146

Thm 9 (de Rouché-Fontené) : A permutation près, on suppose que $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$ où $r = \mathrm{rg}(A)$. Alors le système est compatible ssi $\forall s \in [\![r+1, m]\!]$, $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & & a_{rr} & b_r \\ a_{s1} & & a_{sr} & b_s \end{vmatrix} = 0$. Dans ce cas, le système est équivalent à

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1\,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r\,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n \end{cases}$$

Il admet alors une infinité de solutions dépendantes de $n-r$ paramètres. Les solutions se calculent en résolvant le système de Cramer obtenu en donnant à $x_{r+1}, \dots, x_n$ des valeurs arbitraires.

[GR] p149

Ex 10 : $\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ x + 4y - 2z = 0 \\ 8x - y - z = 3 \end{cases}$ on a $x = \dfrac{2\lambda + 4}{11}$, $y = \dfrac{5\lambda - 1}{11}$, $z = \lambda$

II) Systèmes échelonnés et résolutions directes.

1) Opérations élémentaires

[GR] p37

Prop 11 : L'ensemble des solutions d'un système linéaire ne change pas si l'on effectue sur les équations les opérations (dites élémentaires) suivantes :
- changer l'ordre des équations ;
- multiplier une équation (1er et 2nd membre) par un scalaire non nul ;
- ajouter à une équation une combinaison linéaire des autres équations.

[H2G2] p144

Def 12 :
- matrice de dilatation $D_{i,\alpha}^{(p)} = \begin{pmatrix} I_{i-1} & & (0) \\ & \alpha & \\ (0) & & I_{p-i-1} \end{pmatrix}$, $1 \leq i \leq p$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$
- matrice de transvection $T_{i,j,\beta}^{(p)} = I_p + \beta E_{i,j}^{(p)}$, $1 \leq i \neq j \leq p$, $\beta \in \mathbb{R}$.
- matrice de permutation $P_{i,j}^{(p)} = P_{j,i}^{(p)} = \begin{pmatrix} I_{i-1} & & & & \\ & 0 & \cdots & 1 & \\ & & I_{j-i-1} & & \\ & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & I_{p-j-1} \end{pmatrix}$

[H2G2] p144 **Traduction matricielle** : On note $L_1, \dots, L_p$ les lignes de A.

Opérations	$D_{i,a}^{(p)} A$	$T_{i,j,\beta}^{(p)} A$	$P_{i,j}^{(p)} A$
Résultats	$L_i \leftarrow \alpha L_i$	$L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$	$L_i \longleftrightarrow L_j$

Rq 13 : Pour les opérations sur les colonnes, on effectue des multiplications à droite.

2) Systèmes échelonnés

[H2G2] p130 **Def 14** : On appelle pivot d'une ligne non nulle, le coefficient non nul le plus à gauche.

Def 15 : Une matrice est dite échelonnée en lignes lorsque :
- si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes sont nulles,
- le pivot d'une ligne est strictement plus à droite que les pivots des lignes précédentes.

Elle est dite réduite si de plus tous les pivots sont égaux à 1 et les pivots sont les seuls coefficients non nuls de leur colonne.

Ex 16 : $\begin{pmatrix} 0&1&0&3&0&2&1 \\ 0&0&1&5&0&6&4 \\ 0&0&0&0&1&3&6 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$

[H2G2] p134 **Thm 17** : Notons $\mathcal{E}_{p,m}$ l'ensemble des matrices échelonnées en lignes réduites de taille $p \times m$. Alors $\mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R}) = \bigsqcup_{E \in \mathcal{E}_{p,m}} \{PE \mid P \in GL_p(\mathbb{R})\}$.

Rq 18 : Toute matrice peut se mettre sous forme échelonnée.

3) Méthode du pivot de Gauss.

[CIA] p75 **Méthode** : Pour résoudre $AX = B$ avec A inversible. Trois étapes :
(i) élimination : on cherche Π telle que ΠA soit triangulaire supérieure
(ii) on calcule simultanément ΠB.
(iii) on résout $\Pi A X = \Pi B$ par méthode de remontée.

Rq 19 : En pratique, on calcule seulement ΠA et ΠB et pas Π.

Elimination : • échanges éventuels de lignes et colonnes pour que le pivot de la 1ère ligne soit non nul.
- on échelonne le système : $\forall i \in [\![2, p]\!]$ $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} L_1$.
- on réitère le procédé en partant de la 2ème ligne ...

Rq 19 : Si A une matrice carrée, il existe (au moins) une matrice inversible Π telle que la matrice ΠA soit triangulaire supérieure. [CIA] p76

Complexité : $O(n^3)$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\frac{n^3}{3}$ additions, $\frac{n^3}{3}$ multiplications, $\frac{n^2}{2}$ divisions. [CIA] p80

Ex 20 : $\begin{cases} 2x + y - 2z + 3w = 1 \\ 3x + 2y - z + 2w = 4 \\ 3x + 3y + 3z - 3w = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 2z + 3w = 1 \\ y + 4z - 5w = 5 \\ 3y + 12z - 15w = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 2z + 3w = 1 \\ y + 4z - 5w = 5 \\ 0 = -8 \end{cases}$ [GRI] p38

Le système n'a pas de solution.

Applications 21 :
- calculs du rang d'une matrice
- calculs d'inverses.
- recherche d'un système d'équations d'un s.e.v. défini par une famille génératrice.
- recherche d'une base d'un s.e.v défini par un système d'équations. [H2G2] p18
- générateurs de $GL_n(\mathbb{R})$: dilatations et transvections
- générateurs de $SL_n(\mathbb{R})$: transvections.

Application 22 : Décomposition de Bruhat : ($\mathbb{K}$ corps) $\boxed{\text{DVPT}}$

Soit $G = GL_n(\mathbb{K})$. Soit T_s le sous-groupe de G formé des matrices triangulaires supérieures inversibles. Soit $A \in G$. Alors il existe $T_1, T_2 \in T_s$ et P_σ une matrice de permutation (ie $P = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \le i,j \le n}$ avec $\sigma \in \mathfrak{S}_n$) telles que $A = T_1 P_\sigma T_2$. De plus σ est unique et la partition $G = \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} T_1 P_\sigma T_2$ de $GL_n(\mathbb{K})$ obtenue est appelée décomposition de Bruhat. [FGN Al1]

4) Factorisation LU et Choleski

Thm 23 : Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $\forall k \in [\![1, n]\!]$ $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0$ $(*)$ [GRI] p363

Alors A se factorise de manière unique sous la forme $A = LU$ avec L triangulaire inférieure et U triangulaire supérieure.

Rq 24 : Si la condition $(*)$ n'est pas satisfaite, on peut s'y ramener par une permutation préalable des lignes et des colonnes.

Rq 25 : La factorisation LU est utile pour résoudre plusieurs systèmes ayant la même matrice A. On calcule L et U et on résout ensuite chaque système $Av = b$ ie $LUv = b$ en résolvant 2 systèmes à matrices triangulaires : $Uv = w$ puis $Lw = b$ par la méthode de remontée.

[GR] p363

Thm 26 (Choleski) : Toute matrice A symétrique définie positive, se factorise sous la forme $A = {}^tBB$ avec B triangulaire supérieure. De plus la décomposition est unique si l'on impose que les coefficients de la diagonale de B sont positifs.

[CIA] p89

Méthode : Pour résoudre $Au = b$ avec A symétrique définie positive, on calcule la factorisation $A = {}^tBB$ puis on résout ${}^tBw = b$ et $Bu = w$.

Complexité : $O(n^3)$: $\frac{n^3}{6}$ additions, $\frac{n^3}{6}$ multiplications, $\frac{n^2}{2}$ divisions et n extractions de racines carrées.

[GR] p364

Ex 27 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ alors $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

III) Méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires.

1) Principe des méthodes itératives

[CIA] p95-96

On cherche à résoudre $Au = b$. On se ramène à résoudre $u = Bu + c$ où $(I - B)$ est inversible avec u solution de $Au + b$. On prend un vecteur initiale u_0 arbitraire et on a la suite de vecteurs $(u_k)_{k \geq 0}$, $u_{k+1} = Bu_k + c$. On dit alors que la méthode itérative est convergente si $\lim_{k \to +\infty} u_k = u \; \forall u_0$.

Thm 28 : La méthode itérative converge
ssi $\rho(B) < 1$ où $\rho(B)$ est le rayon spectral de B
ssi $\|B\| < 1$ pour au moins une norme matricielle $\|.\|$.

2) Méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel et relaxation.

Méthode : On décompose $A = M - N$. avec M facile à inverser.
Alors $Au = b \iff Mu = Nu + b \iff u = M^{-1}Nu + M^{-1}b = Bu + c$ avec $B = M^{-1}N$. et $c = M^{-1}b$.
On calcule la suite des itérés : $u_{k+1} = M^{-1}Nu_k + M^{-1}b$.
Pour trouver M et N on décompose A en $A = \begin{pmatrix} \cancel{D} & -F \\ -E & \end{pmatrix} = D - E - F$

[CIA] p102

Nom	Décomposition $A = M - N$	Matrice $M^{-1}N$ de la méthode	Description d'une itération
Jacobi	$A = D - (E+F)$	$J = D^{-1}(E+F)$	$Du_{k+1} = (E+F)u_k + b$
Gauss-Seidel	$A = (D-E) - F$	$\mathcal{L}_1 = (D-E)^{-1}F$	$(D-E)u_{k+1} = Fu_k + b$
Relaxation	$A = \left(\frac{D}{\omega} - E\right) - \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)$ $\omega \neq 0$	$\mathcal{L}_\omega = \left(\frac{D}{\omega} - E\right)^{-1}\left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)$	$\left(\frac{D}{\omega} - E\right)u_{k+1} = \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)u_k + b$

[CIA] p102-104

Thm 29 : Soit A une matrice hermitienne définie positive, décomposée sous la forme $A = M - N$, M inversible. Si la matrice hermitienne $(M^* + N)$ est définie positive, alors $\rho(M^{-1}N) < 1$ et la méthode converge.

Thm 30 : Soit A hermitienne définie positive. La méthode de relaxation converge ssi $\omega \in]0, 2[$.

Thm 31 : Soit A une matrice tridiagonale. Les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel convergent ou divergent simultanément. Lorsqu'elles convergent, la méthode de Gauss-Seidel converge plus rapidement que celle de Jacobi.

3) Méthode du gradient à pas optimal.

Une fonction quadratique sur $\mathbb{R}^n$ est une fonction de la forme $J : v \in \mathbb{R}^n \longrightarrow J(v) = \frac{1}{2}\langle Av, v\rangle - \langle b, v\rangle$ où A est une matrice symétrique donnée, $b \in \mathbb{R}^n$ un vecteur donné. J est dérivable dans $\mathbb{R}^n$ et $\nabla J(u) = Au - b \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$.
Ainsi la résolution des systèmes à matrice symétrique équivaut à la recherche des points où la dérivée s'annule.

[HU]

Lemme 32 : Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,
$$\langle Ax, x\rangle\langle A^{-1}x, x\rangle \leq \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}\right)^2 \|x\|^4$$
où λ_1 et λ_n désignent respectivement la plus grande et la plus petite valeur propre de A.

Thm 33 (Algorithme du gradient à pas optimal) : $\boxed{\text{DVPT}}$
Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ où $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$.
$x \longmapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + c$

On considère le problème d'optimisation suivant :
(P) Minimiser $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$

Alors il existe une unique solution $\bar{x}$ de P, et elle est caractérisée par $\nabla f(\bar{x}) = 0$. De plus, l'algorithme du gradient à pas optimal défini par $\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ \forall k \in \mathbb{N},\ x_{k+1} = x_k + t_k d_k \end{cases}$
où $d_k = -\nabla f(x_k)$ et t_k est l'unique réel minimisant $t \longmapsto f(x_k + t d_k)$, converge vers $\bar{x}$.

Références :

[GR1] : Grifone, Algèbre linéaire.

[CIA] : Ciarlet, Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation.

[H2G2] : Caldero - Germoni, Histoires hédonistes de groupes et de géométries Tome 1

[FGNAl1] : Oraux X-ENS Algèbre 1 (Thm de Bruhat)

[HU] : Hiriart-Urruty, Optimisation et Analyse convexe (Gradient à pas optimal)

On peut parler de :

- conditionnement
- décomposition LU pour une matrice tridiagonale
- décomposition QR

Décomposition de Bruhat

Isaline AUBERT et Ninon FETIQUE

Référence : Francinou, Gianella, Nicolas, *Algèbre 1*, p347.

Définition 1.

Un *drapeau d'un espace vectoriel de dimension finie* E est une suite finie strictement croissante pour l'inclusion de sous-espaces vectoriels de E, le premier étant l'espace nul et le dernier E tout entier.

On notera :
— T_s l'ensemble des matrices triangulaires superieures inversibles ;
— P_σ la matrice de permutation associée à la permutation σ ;
— $\mathcal{D}$ l'ensemble des drapeaux d'un espace vectoriel.

Théorème 1.

On a :

$$GL_n(\mathbb{K}) = \bigsqcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} T_s \sigma T_s.$$

Démonstration. Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Posons quelques notations :
— $E_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui d'indices i, j ;
— pour $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $T_{i,j}(\lambda) = Id + \lambda E_{i,j}$;
— pour tout i et tout $\alpha \neq 0$, $D_i(\alpha) = Id + (\alpha - 1)E_{i,j}$.

Multiplier A à droite par $T_{i,j}(\lambda)$ revient à faire l'opération sur les colonnes $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$, et Ã gauche revient à faire l'opération sur les lignes $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

Multiplier A à droite par $D_i(\alpha)$ revient à faire l'opération sur les colonnes $C_i \leftarrow \alpha C_i$, et à droite revient à faire l'opération sur les lignes $L_i \leftarrow \alpha L_i$.

On applique l'algorithme suivant :

Soit i_1 le plus grand indice k tel que $a_{k,1} \neq 0$. On fait les opérations $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,1}}{a_{i_1,1}} L_{i_1}$ pour $i \neq i_1$ et $C_j \leftarrow C_j - \frac{a_{i_1,j}}{a_{i_1,1}} C_1$.

Cela ne revient qu'à multiplier à gauche et à droite par des matrices de T_s. On termine par

$C_1 \leftarrow \frac{1}{a_{i_1,1}} C_1$ pour être dans la situation :

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

On prend ensuite i_2 le plus grand indice k tel que $a_{k,2} \neq 0$. Notons que $i_2 \neq i_1$. Par les mêmes opérations, on annule les coefficients de la colonne 2 et de la ligne i_2 : cela ne modifie par les 0 de la colonne 1 et de la ligne i_1.

On itère ce procédé, et on obtient une matrice de permutation P_σ, où σ est la permutation définie par $(1\ i_1\ i_{i_1}\ \cdots)$.

On a donc une décomposition $A = T_1 P_\sigma T_2$, $T_1, T_2 \in T_s$.

Supposons qu'on ait deux décompositions $T_1 P_\sigma = P_\tau T_2$.

Alors $T_2 = P_{\tau^{-1}} T_1 ¶_\sigma$. Supposons $\sigma \neq \tau$: il existe i tel que $\sigma(i) < \tau(i)$.

Le coefficient i, i de T_2 est non nul car T_2 inversible, et l'égalité précédente nous donne l'égalité :

$$T_2(i,i) = T_1(\tau(i), \sigma(i)) = 0,$$

d'où une contradiction. □

Théorème 2.

L'action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ possède $n!$ orbites.

Démonstration. $GL_n(\mathbb{K})$ agit à gauche sur $\mathcal{D}$, de façon transitive. Le stabilisateur du drapeau canonique est T_s, et donc $\mathcal{D}$ est en bijection avec le quotient $GL_n(\mathbb{K})/T_s$.

Soit $(A, B) \in GL_n(\mathbb{K})/T_s \times GL_n(\mathbb{K})/T_s$. Alors

$$\begin{aligned}(A,B) &\sim A(I_n, A^{-1}B) \\ &\sim A(I_n, T_1 P_\sigma T_2) \\ &\sim AT_1(I_n, P_\sigma).\end{aligned}$$

Donc chaque orbite a un élément de la forme (I_n, P_σ). Supposons qu'il existe $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ dans une même orbite.

Alors il existe $A \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $(I_n, P_\sigma) = (A, AP_\tau)$.

Alors $A \in T_s$, et donc $\exists T \in T_s,\ AP_\tau = P_\sigma S$. Par dÃécomposition de Bruhat, $\sigma = \tau$, ce qui est faux par hypothèse.

Donc on a une bijection entre les orbites et les permutations, d'où les $n!$ orbites. □

Algorithme du gradient à pas optimal

Référence : Hiriart-Urruty, Optimisation et analyse convexe.

Lemme (Inégalité de Kantorovitch)

Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\langle Ax, x\rangle \langle A^{-1}x, x\rangle \leq \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}\right)^2 \|x\|^4$

où λ_1 et λ_n désignent la plus grande et la plus petite valeur propre de A.

Thm (Algorithme du gradient à pas optimal)

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + c \end{array}$ où $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$.

On cherche à minimiser $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^n$.

Alors il existe une unique solution $\bar{x}$ à ce problème, et elle est caractérisée par $\nabla f(\bar{x}) = 0$.

De plus, l'algorithme défini par $\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ \forall k \in \mathbb{N}, x_{k+1} = x_k + t_k d_k \end{cases}$

où $d_k = -\nabla f(x_k)$ et t_k est l'unique réel minimisant $t \mapsto f(x_k + t d_k)$, converge vers $\bar{x}$.

Preuve. La matrice hessienne de f en x est $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, donc f admet un minimum. Il est unique car il vérifie $\nabla f(x) = 0$, ie $Ax = -b$.

On a donc $\bar{x} = A^{-1}b$ et la valeur optimale est $\bar{f} = f(\bar{x}) = \frac{1}{2}\langle A^{-1}b, b\rangle + c$.

Montrons les relations : $\begin{cases} t_k = \dfrac{\|d_k\|^2}{\langle Ad_k, d_k\rangle} \\ d_{k+1} = d_k - t_k A d_k \\ \langle d_{k+1}, d_k\rangle = 0 \\ f(x_{k+1}) - \bar{f} = (f(x_k) - \bar{f})\left(1 - \dfrac{\|d_k\|^4}{\langle Ad_k, d_k\rangle\langle A^{-1}d_k, d_k\rangle}\right) \end{cases}$

- Comme $f(x_k + t d_k) = f(x_k) + \frac{1}{2}t^2\langle Ad_k, d_k\rangle + t\langle Ax_k + b, d_k\rangle$, la fonction $t \in \mathbb{R} \longmapsto f(x_k + t d_k)$ est minimiser en un seul point de $\mathbb{R}$: $t_k = \dfrac{\|d_k\|^2}{\langle Ad_k, d_k\rangle}$.
- On a $d_{k+1} = -\nabla f(x_{k+1}) = -(Ax_{k+1} + b) = -Ax_k - b - t_k A d_k = d_k - t_k A d_k$.
- Et $\langle d_{k+1}, d_k\rangle = \|d_k\|^2 - t_k\langle Ad_k, d_k\rangle = 0$.

• En développant on obtient $f(x_{k+1}) = f(x_k + t_k d_k) = f(x_k) - \dfrac{1}{2}\dfrac{\|d_k\|^4}{\langle Ad_k, d_k\rangle}$.

Donc $f(x_{k+1}) - \bar{f} = f(x_k) - \dfrac{1}{2}\dfrac{\|d_k\|^4}{\langle Ad_k, d_k\rangle} - \bar{f} = \left(f(x_k) - \bar{f}\right)\left(1 - \dfrac{\|d_k\|^4}{2\left(f(x_k) - \bar{f}\right)\langle A d_k, d_k\rangle}\right)$.

De plus,
$$\begin{aligned}\langle A^{-1}d_k, d_k\rangle &= \langle A^{-1}(Ax_k + b), Ax_k + b\rangle \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\langle Ax_k, x_k\rangle + \langle b, x_k\rangle + \frac{1}{2}\langle A^{-1}b, b\rangle\right) \\ &= 2\left(f(x_k) - \bar{f}\right) \qquad \text{car } \frac{1}{2}\langle A^{-1}b, b\rangle = c - \bar{f}.\end{aligned}$$

D'où $f(x_{k+1}) - \bar{f} = \left(f(x_k) - \bar{f}\right)\left(1 - \dfrac{\|d_k\|^4}{\langle Ad_k, d_k\rangle\langle A^{-1}d_k, d_k\rangle}\right)$

Posons alors $C_2(A) = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_n}$. Par l'inégalité de Kantorovitch,

$$\begin{aligned}f(x_{k+1}) - \bar{f} &\leq \left(f(x_k) - \bar{f}\right)\left(1 - 4\frac{C_2(A)}{(C_2(A)+1)^2}\right) \\ &\leq \left(f(x_k) - \bar{f}\right)\left(\frac{C_2(A) - 1}{C_2(A) + 1}\right)^2\end{aligned}$$

D'où $f(x_k) - \bar{f} \leq \left(f(x_0) - \bar{f}\right)\left(\dfrac{C_2(A) - 1}{C_2(A) + 1}\right)^{2k}$

De plus,
$$\begin{aligned}f(x_k) - \bar{f} &= \frac{1}{2}\langle Ax_k, x_k\rangle + \langle b, x_k\rangle + c - \bar{f} \\ &= \frac{1}{2}\langle A(x_k - \bar{x}), x_k - \bar{x}\rangle \\ &\geq \frac{1}{2}\lambda_n \|x_k - \bar{x}\|^2\end{aligned}$$

Donc $\|x_k - \bar{x}\| \leq \left(\dfrac{2\left(f(x_0) - \bar{f}\right)}{\lambda_n}\right)^{1/2}\left(\underbrace{\dfrac{C_2(A) - 1}{C_2(A) + 1}}_{<1}\right)^k$

On en conclut que $x_k \xrightarrow[k \to \infty]{} \bar{x}$. ∎