160

Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien de dimension finie.

$(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace euclidien de dimension n, $\|\cdot\|$ est la norme associée. $L(E)$ est l'espace des endomorphismes de E.

I Structure euclidienne sur un espace vectoriel.

1) Orthogonalité

Déf 1 $A \subset E$. On note $A^\perp := \{x \in E \ \forall a \in A \ \langle a, x\rangle = 0\}$ l'orthogonal de A.

Ex 2 • $E^\perp = \{0\}$ • $\{0\}^\perp = E$ • $A^\perp$ est toujours un sev de E.

Prop 3 Soit F un sev de E. On a
(i) $E = F \oplus F^\perp$ (ii) $F^{\perp\perp} = F$

Déf 4 Une base orthogonale (BO) de E est une base dont les vecteurs sont deux à deux orthogonaux. S'ils sont de plus normés, on dit que la base est orthonormée (BON).

Th 5 Tout espace euclidien admet une BON.

Th 6 On peut construire une BON à partir de toute base de E.

Ex 7 $\langle P, Q\rangle := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} P(x) Q(x)\, dx$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. La BON obtenue à partir de $(1, X, X^2)$ est $(1, X, 2^{-1/2}(X^2-1))$.

Déf 8 Soit F un sev de E. On appelle projecteur orthogonal sur F le projecteur p_F sur F parallèlement à $F^\perp$. Si $(e_i)_{1\leq i\leq k}$ est une BON de F, on a
$$\forall x \in E \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i\rangle e_i .$$

Prop 9 Dans ce contexte, on a $d(x, F) := \inf_{y\in F} \|x-y\| = \|x - p_F(x)\|$. pour $x \in E$

2) Adjoint d'un endomorphisme

Dans la suite, $u \in L(E)$ est un endomorphisme.

Déf 10 Il existe un unique $u^* \in L(E)$ tel que $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle_{x,y\in E}$. On l'appelle adjoint de u, et si (e_i) est une base de E, on a
$$\mathrm{Mat}_{(e_i)}(u^*) = {}^t\mathrm{Mat}_{(e_i)}(u)$$

Ex 11 Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie ${}^tAA = 0$, alors $A = 0$.

App 12 On généralise l'adjoint à $f \in L(E, E')$. Si f est injective, on définit alors l'inverse généralisé de f par $\tilde f = (f^* \circ f)^{-1} \circ f^*$, et la solution des moindres carrés de $f(x) = b$ est alors $x_0 = \tilde f(b)$.

Prop 13 (i) $u \mapsto u^*$ est linéaire involutive et fixe l'identité.
(ii) $\forall u, v \in L(E)$ $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.
(iii) $\forall u \in E$ $rg(u) = rg(u^*)$ et $\det(u) = \det(u^*)$.

Prop 14 Si F est un sev u-stable, $F^\perp$ est u^*-stable.

II Étude des endomorphismes orthogonaux.

1) Groupe orthogonal

Déf 15 u est dit orthogonal s'il préserve le ps. On note $O(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux.

Prop 16 Il y a équivalence entre (i) $u \in O(E)$
(ii) u préserve la norme : $\forall x \in E$ $\|u(x)\| = \|x\|$
(iii) $u \circ u^* = u^* \circ u = Id_E$.
(iv) Si A est la matrice de u dans une BON, ${}^tAA = A{}^tA = I_n$.

Rq 17 On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices vérifiant (iv) : $O_n(\mathbb{R}) \simeq O(\mathbb{R}^n)$.

Ex 18 Les isométries vectorielles de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, et plus généralement les symétries orthogonales de $\mathbb{R}^n$ sont des éléments de $O(E)$.

Cex 19 Les projecteurs orthogonaux (sauf l'identité) n'en sont pas.

Prop 20 Soit $u \in O(E)$. Alors ses valeurs propres (si elles existent) sont dans $\{\pm 1\}$, et u est de déterminant ± 1. En particulier, $O(E)$ est un sous-groupe de $GL(E)$.

Rq 21 Vu comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A \in O_n(\mathbb{R})$ peut avoir d'autres valeurs propres, toutes de module 1.

Déf 22 Si $u \in O(E)$, u est dit direct s'il est de déterminant 1, et indirect sinon. On note $SO(E)$ et $O^-(E)$ les ensembles respectifs des isométries directes et indirectes.

Rq 23 En tant que noyau du déterminant, $SO(E)$ est distingué dans $O(E)$.

Prop 24 u est orthogonal ssi il transforme une BON en BON ssi il transforme toute BON en BON.

App 25 Toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme $A = QR$ avec $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et R triangulaire supérieure.

2) Quelques remarques topologiques et algébriques

Prop 26 - $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ sont des sous-groupes compacts de

$GL_n(\mathbb{R})$. Tout sous-groupe compact maximal de $GL_n(\mathbb{R})$ est conjugué à $O_n(\mathbb{R})$.

Prop 27 $SO_n(\mathbb{R})$ et $O_n^-(\mathbb{R})$ sont les deux composantes connexes (homéomorphes) de $O_n(\mathbb{R})$.

Def 28 $A \in O_n(\mathbb{R})$ est une symétrie orthogonale si $u^2 = Id$. On en distingue deux types particuliers :

- si le sous-espace propre de A associé à -1 est de dimension 1, ie $A \simeq \begin{pmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&-1\end{pmatrix}$ on dit que A est une réflexion.
- s'il est de dimension 2, ie $A \simeq \begin{pmatrix}1&&&\\&\ddots&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix}$ on dit que A est un renversement.

Prop 29 (i) Si $n \geq 2$, toute matrice orthogonale est produit d'au plus n réflexions (les réflexions engendrent donc $O_n(\mathbb{R})$).
(ii) Si $n \geq 3$, toute matrice orthogonale directe est produit d'au plus $n-1$ renversements (les renversements engendrent $SO_n(\mathbb{R})$).

Th30 $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

Th31 Soit G le groupe des quaternions de module 1. Alors $G/\{\pm1\}$ est isomorphe à $SO_3(\mathbb{R})$. $\boxed{\text{DVPT 1}}$

App32 Tous les automorphismes du corps des quaternions sont intérieurs.

3) Étude de $O_2(\mathbb{R})$ et $O_3(\mathbb{R})$

Prop 33 $SO_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des rotations $\left\{R(\theta) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos(\theta)\end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R}\right\}$, θ étant l'angle de la rotation. $O_2^-(\mathbb{R})$ est l'ensemble des symétries orthogonales $\left\{S(\theta) = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\ \theta \in \mathbb{R}\right\}$, où $\theta/2$ est l'angle par rapport à $\mathbb{R}e_1$ de l'axe de symétrie (voir annexe).

Rq34 La composée de deux symétries orthogonales est donc une rotation. La réciproque est vraie, via le calcul $R(\theta) = S(\theta) \circ S(0)$.

Prop35 Si $A \in O_3(\mathbb{R})$, A est orthogonalement semblable à $\begin{pmatrix}R(\theta) & \\ & \varepsilon\end{pmatrix}$ où $\theta \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \{\pm1\}$. A est donc une rotation d'angle θ autour d'un axe donné, suivi si $\varepsilon = -1$ d'une symétrie orthogonale par rapport au plan orthogonal à l'axe de la rotation. De plus, l'angle est déterminé par la trace de A. (voir annexe)

Ex 36 Soit $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&2\\2&2&-1\\-1&2&2\end{pmatrix}$. $A \in SO_n(\mathbb{R})$, c'est la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ autour de $\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

4) Réduction des endomorphismes orthogonaux

Prop 37 Soit $u \in O(E)$ et F u-stable. Alors $F^\perp$ est u-stable.

Th38 Soit $u \in O(E)$. Alors il existe une BON de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix}R(\theta_1)&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&R(\theta_r)&&&\\&&&\varepsilon_1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&\varepsilon_s\end{pmatrix}$ où $\theta_i \in \mathbb{R}$, $\theta_i \not\equiv 0[\pi]$ et $\varepsilon_j \in \{\pm1\}$

III Étude des endomorphismes auto-adjoints

1) Réduction des endomorphismes auto-adjoints

Def39 On dit que u est auto-adjoint ou symétrique si $u = u^*$. C'est équivalent au fait que sa matrice dans une (resp. toute) BON de E est symétrique. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques. On dit aussi que u est anti-symétrique si $u = -u^*$, et on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices anti-symétriques.

Ex40 Soit p un projecteur. Alors p est un projecteur orthogonal ssi il est auto-adjoint.

Prop41 $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Th42 Soit $u \in S(E)$. Alors u est diagonalisable, et ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux, ce qui permet la construction d'une BON de E faite de vecteurs propres de u.

Rq43 On en déduit le même résultat pour les matrices $A \in S_n(\mathbb{R})$.

2) Décomposition polaire

Def44 On dit que $A \in S_n(\mathbb{R})$ est positive (resp définie positive) si $\langle x, Ax\rangle$ est positif (resp. strictement positif) pour tout x non nul. On note respectivement $S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ leurs ensembles.

Ex45 La nature (symétrique positive, négative, avec des valeurs propres de signes distincts) de la hessienne d'une fonction C^2 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ permet de déterminer la nature des points critiques (minimum, maximum, point col).

Ex 46 Toute matrice symétrique définie positive est la matrice de covariance d'un unique vecteur gaussien de moyenne donnée.

Prop 47 $A \in S_n(\mathbb{R})$ est la matrice d'un produit scalaire ssi $A \in S_n^{++}$.

Th 48 L'application $\Phi : O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ $\boxed{\text{DVPT 2}}$

$$(O, S) \longmapsto OS$$

est un homéomorphisme.

App 49 Pour toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$, on a $\|A\|_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)}$

App 50 Les points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{L}(E)$ sont exactement les éléments de $O(E)$.

Rq 51 Puisque $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit $A = OS$ avec $\begin{cases} O \in O_n(\mathbb{R}) \\ S \in S_n^+(\mathbb{R}) \end{cases}$

IV Étude des endomorphismes normaux.

Def 52 On dit que u est normal si u et u^* commutent (de même pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

Ex 53 Les endomorphismes orthogonaux, auto-adjoints ou anti-symétriques sont normaux. Les similitudes ($u^* = \lambda u^{-1}$, $\lambda > 0$) aussi, et leur ensemble $GO_n(\mathbb{R})$ est isomorphe à $\mathbb{R}_+^* \times O_n(\mathbb{R})$.

Prop 54 Si u est normal, alors pour $x \in E$, on a

$$\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$$

Prop 55 Si u est normal et λ une valeur propre, $E_\lambda^\perp$ est u-stable.

... 56 Soit u un endomorphisme normal. Alors il existe une BON de E dans laquelle la matrice de u est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & \tau_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix}$$

où r et s sont des entiers positifs ou nuls, (λ_i) des réels et (τ_j) des matrices normales sur $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire de la forme $\tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}$ avec a_j, b_j réels ($b_j \neq 0$).

Ex 57 Dans le cas des matrices anti-symétriques, les λ_i et les a_j sont nuls. En particulier, si n est impair, toute matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est non inversible.

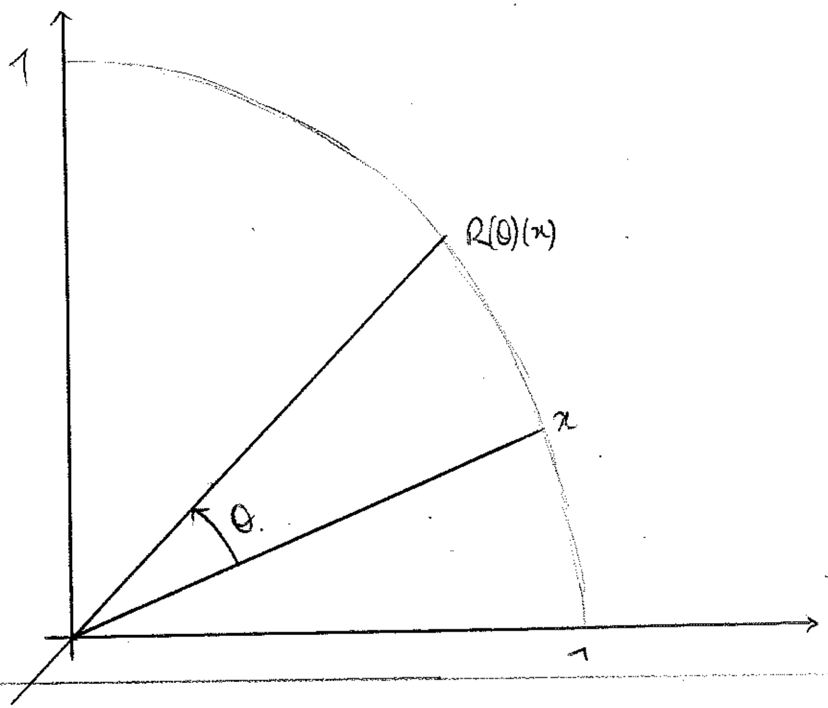
Références

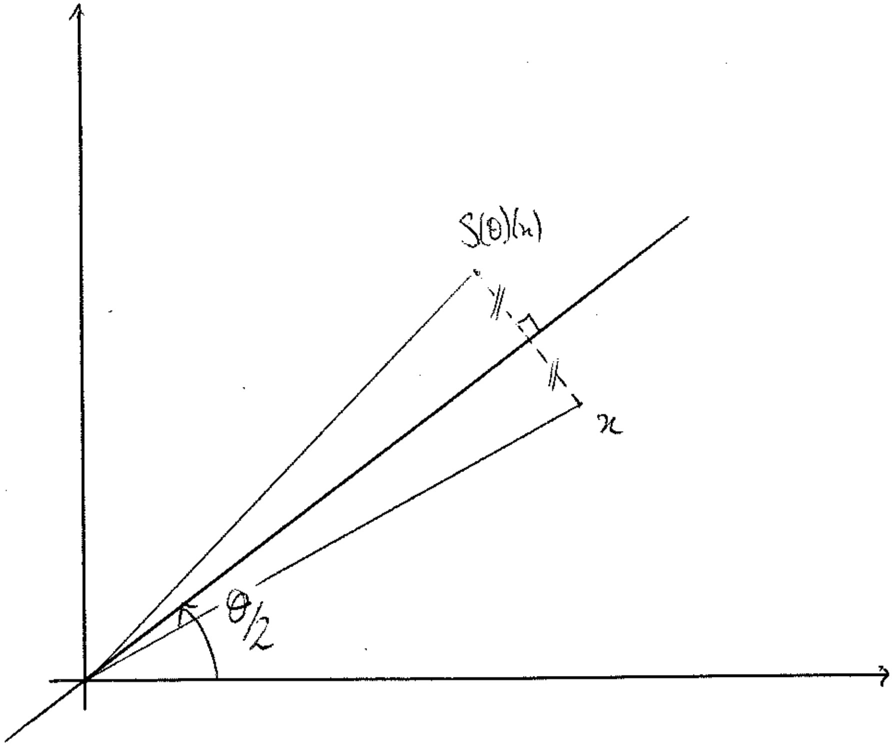
GRIFONE, Algèbre linéaire
GOURDON, Algèbre
CALDERO/GERMONI H2G2 Tome 1.
PERRIN Cours d'algèbre
FGN Oraux XENS Algèbre 3.
(TAUVEL Cours d'algèbre
AUDIN Géométrie)

Autres développements possibles

Réduction des endomorphismes normaux (Th 56).
Théorème spectral (Th 42)
App 50 (un peu court je pense).
$\exp : S_n \to S_n^{++}$ est un homéomorphisme.

Prop 33





Prop 35