ENDOMORPHISMES REMARQUABLES D'UN ESPACE VECTORIEL EUCLIDIEN (DE DIMENSION FINIE)

160

Soit $(E, \langle \rangle)$ un espace vectoriel euclidien de dimension n

I - GÉNÉRALITÉS SUR L'ADJOINT

1 Définitions et premières propriétés

Déf/thm 1. Pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique endomorphisme $u^* \in \mathcal{L}(E)$, appelé adjoint de u tel que $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle u(x) | y \rangle = \langle x | u^*(y) \rangle$

Ex 2 Si $u = \lambda \, id_E$ est une homothétie, $u^* = u$. Si u est une symétrie orthogonale, $u^* = u$. Soit $S_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle S, T \rangle \overset{?}{=} tr(ST)$, soit φ_A $M \in S_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^tAMA \in S_n(\mathbb{R})$. Alors $\varphi_A^* = \varphi_{A}$

Prop 3 Soit B une base orthonormée de E. Alors $Mat_B u^* = {}^tMat_B u$.

Cor 4 On en déduit que $\det u = \det u^*$ et $rg\, u = rg\, u^*$.

Prop 5 Pour tous endomorphismes u, v dans $\mathcal{L}(E)$

i) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda u + v)^* = \lambda u^* + v^*$ iii) $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$

ii) $(u^*)^* = u$ iv) Si $u \in GL(E)$, $u^* \in GL(E)$ et $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$

Prop 6 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a

i) $\ker u^* = (\mathrm{Im}\, u)^\perp$ et ii) $\mathrm{Im}\, u^* = (\ker u)^\perp$

Prop 7 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u alors $F^\perp$ est stable par u^*

2 Réduction des endomorphismes normaux

Déf 8 Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal si $u^* \circ u = u \circ u^*$.

Prop 9 Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est normal si et seulement si $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$ $\forall x \in E$

Prop 10 Un endomorphisme u est normal ssi pour toute base B orthonormée, $Mat(u)$ et ${}^tMat(u)$ commutent ssi il existe une base orthonormée B pour laquelle $Mat_B(u)$ et ${}^tMat_B(u)$ commutent. On parle alors de matrices normales

Ex 11 La matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ est normale. Si $A \in A_n(\mathbb{R})$ (= ensemble des matrices antisymétriques) alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $A + \lambda I_n$ est normale.

Lemme 12 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal. Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u.

Lemme 13 Pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un sous-espace vectoriel de E de dim 1 ou 2 stable par u

Lemme 14 Soit u un endomorphisme normal d'un espace euclidien de dimension 2. Si u a une valeur propre réelle alors, il est diagonalisable dans une base orthonormée. Sinon pour toute base orthonormée B de E, la matrice de u dans B est de la forme $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ avec $b \neq 0$

Thm 15 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal. Il existe une base orthonormée B de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs avec un bloc D_p diagonale d'ordre p et r blocs 2×2 de la forme $\begin{bmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{bmatrix}$ avec $b_k \neq 0$ (avec $p + 2r = n$)

Cor 16 Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Alors il existe une matrice P orthogonale (i.e. ${}^tPP = I_n$) telle que ${}^tPMP = diag(0, \ldots, 0, T_1, \ldots, T_r)$ où les T_i sont des matrices de $M_2(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$

II - ENDOMORPHISMES ORTHOGONAUX

1 Présentation

Déf 17 Si $u \in \mathcal{L}(E)$ alors u préserve le produit scalaire (i.e. $\forall (x,y) \in E \times E$, $\langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle$) si et seulement si u préserve la norme (i.e. $\forall x \in E$ $\|u(x)\| = \|x\|$). Un endomorphisme préservant le produit scalaire ou la norme est appelé isométrie

Ex 18 Une homothétie de rapport λ est orthogonale ssi $|\lambda| = 1$. L'application $(x,y) \mapsto (x,-y)$ est une isométrie en dimension 2. La symétrie orthogonale de droite $Vect(x)$ $(x \neq 0)$, donnée par $s(y) = y - 2 \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|^2} x$, est une isométrie

Rem 19 Si u est une isométrie, $u \circ u^* = u^* \circ u = id$ et en particulier, c'est un endomorphisme normal

Déf 18 Une matrice $P \in M_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si ${}^tPP = I_n$. On notera $P \in O_n(\mathbb{R})$

Ex 19 La matrice $A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ est orthogonale

Prop 20 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, u est une isométrie ssi il existe une base/pour toute base orthonormée B dans laquelle la matrice de u est orthogonale.

C-ex 21 (lorsque la base n'est pas orthonormée) La matrice de l'isométrie $(x,y) \mapsto (-x,y)$ dans la base $\binom{1}{0}$ et $\binom{1}{1}$ vaut $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ qui n'est pas une matrice orthogonale.

Prop 22 u est orthogonale ssi il existe une base orthonormée qui transformée par f reste une base orthonormée.

Ex 23 Les matrices de permutations sont donc orthogonales

Prop 23 Soit u une isométrie. Alors $\det u = \pm 1$. Si $\det u = +1$, u est une isométrie directe, sinon isométrie indirecte. De même pour les matrices orthogonales. On note $SO_n(\mathbb{R}) = \{P \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det P = 1\}$

Ex 24 : le déterminant d'une matrice de permutation σ vaut la signature $\varepsilon(\sigma)$. Ainsi si la permutation est paire, l'isométrie est directe. La matrice $A_1 \in SO_3(\mathbb{R})$. La symétrie orthogonale de droite $Vect(x)$ est une isométrie indirecte.

2. Réduction des endomorphismes orthogonaux

Prop 25 : les valeurs propres d'une isométrie sont de module 1.

Ex 26 : les valeurs propres des matrices de permutation sont des racines de l'unité.

Thm 27 : Soit u une isométrie de E (de dim $n \geq 2$). Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u s'écrit

$$\begin{bmatrix} I_p & & & & (0) \\ & -I_q & & & \\ & & R_1 & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & R_r \end{bmatrix}$$

où $\forall k \in [\![1, r]\!]$, $R_k = \begin{bmatrix} \cos\theta_k & -\sin\theta_k \\ \sin\theta_k & \cos\theta_k \end{bmatrix}$ avec $\theta_k \in]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$ et $p+q+2r = n$.

App 28 : la fonction $\exp : A_n(\mathbb{R}) \to SO_n(\mathbb{R})$ est surjective. Par exemple, pour $n=2$, $\exp\begin{bmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$

App 29 : le groupe $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

App 30 : les seuls éléments de $O(E)$ qui sont diagonalisables sont les symétries orthogonales.

App 31 (classification en dim 2) Soit $A \in O_2(\mathbb{R})$.

i) Soit $A \in SO_2(\mathbb{R})$ et alors $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ et correspond à la rotation d'angle θ et de centre O.

ii) Soit $A \notin SO_2(\mathbb{R})$ et alors $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$ et correspond à la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'angle $\theta/2$.

App 32 (classification en dim 3) Soit $A \in O_3(\mathbb{R})$, $A \neq \pm Id$

i) Si $\det A = 1$, A représente dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ une rotation autour de l'axe $\mathrm{Ker}(u - id)$, l'angle de la rotation est donné par $\mathrm{Tr}\, A = 2\cos\theta + 1$.

ii) Si $\det A = -1$, A représente dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ une rotation autour de l'axe $E_{-1} = \mathrm{Ker}(u+id)$ suivie d'une symétrie orthogonale par rapport au plan $E_{-1}^{\perp}$. L'angle de la rotation est donné par $\mathrm{Tr}\, A = 2\cos\theta - 1$.

Ex 33 : la matrice $A_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ représente dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ la rotation d'angle $\pi/3$ autour de l'axe D dirigé par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Engendrement de $O(E)$

Déf 34 : On appelle réflexion orthogonale toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan. On appelle renversement toute symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace de dimension $n-2$.

Ex 35 : si $a \in E \setminus \{0\}$, $s_a : x \mapsto x - 2\frac{\langle a|x \rangle}{\|a\|^2} a$ est une réflexion.

Prop 36 : * $Z(O(E)) = \{-id, +id\}$
* $Z(SO(E)) = \begin{cases} \{-id, +id\} & \text{si } n \text{ pair} \\ \{id\} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

Théorème 37 : Pour tout $u \in O(E)$, u est produit d'au plus n réflexions.

Ex 38 : Pour $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, on a $A = S_1 S_2$ où $S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $S_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

App 39 : Pour tout $u \in SO(E)$, u est produit d'au plus n renversements.

DEV

App 40 : $SO_3(\mathbb{R})$ est simple

III. ENDOMORPHISMES SYMETRIQUES

Déf 41 : $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit symétrique ssi $u^* = u$ i.e. $\langle u(x)|y \rangle = \langle x|u(y) \rangle$ $\forall x, y \in E$

Ex 42 : * Une symétrie orthogonale est symétrique.
* Un projecteur orthogonal est symétrique.
* Pour $E = \mathbb{R}_n[X]$, on définit $L : E \to E$ par $L(P)(x) = \int_0^1 (x+t)^n P(t)\,dt$. L est symétrique.

Rem 43 : Si u est symétrique alors u est normal.

Prop 44 : $u \in \mathcal{L}(E)$ ssi pour toute base $\mathcal{B}$ orthonormée, $M_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique ssi il existe une base $\mathcal{B}$ orthonormée telle que $M_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique.

Cor 45 : Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des endomorphismes symétriques est de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

Ex 46 : Une matrice de permutation M_σ est symétrique ssi σ est un produit de transpositions.

Déf 47 : Soit un endomorphisme symétrique u. u est dit positif (resp. défini positif) ssi $\forall x \in E$, $\langle u(x)|x \rangle \geq 0$ (resp. $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $\langle u(x)|x \rangle > 0$).

Ex 48 : * Un projecteur orthogonal est symétrique positif.
* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & (0) \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique définie positive

2. Réduction des endomorphismes symétriques

Prop 49 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique. Alors χ_u est scindé sur $\mathbb{R}$.

Prop 50 : Si u est symétrique positif (respectivement défini positif) alors $Sp(u) \subset \mathbb{R}^+$ (respectivement, $Sp(u) \subset \mathbb{R}^{+*}$)

Thm 51 : tout endomorphisme symétrique se diagonalise dans une base orthonormée.

Ex 52 : Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ alors ${}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ où $P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$

App 53 : Soit u un endomorphisme symétrique. Alors u est définie positive ssi $Sp(u) \subset \mathbb{R}_+^*$

DEV **App 54** : $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme

App 55 : Si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe une unique $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $B^2 = A$

App 56 : $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $Gl_n(\mathbb{R})$

App 57 : Pour toute matrice $A \in Gl_n(\mathbb{R})$, il existe un unique couple $(O,S) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}$ tel que $A = OS$

App 58 : $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

THM 59 : Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Il existe $P \in Gl_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tPP$ et $B = {}^tPDP$ où $D \in M_n(\mathbb{R})$ est diagonale.

App 60 : Soient A et $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Alors $\forall t \in]0,1[$:

$$\det(tA + (1-t)B) \geq (\det A)^t \det(B)^{1-t}$$

avec égalité si et seulement si $A = B$

déf 61 : On appelle ellipsoïde toute partie de $\mathbb{R}^n$ de la forme $\{x \in \mathbb{R}^n, q(x) \leq 1\}$ où q est une forme quadratique définie positive

Cor 62 : Pour tout compact de $\mathbb{R}^n$, d'intérieur non vide, il existe un unique ellipsoïde de volume minimale, contenant ce compact et centré en 0

C-Ex 63 : Si K compact d'intérieur vide, il n'y a pas forcément existence : par exemple $K = \{0\}$.

3. Application en optimisation

Prop 64 : Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, où U est un ouvert, est deux fois différentiable en $a \in U$, alors $\nabla^2 f(a) := (\partial_{i,j} f(a))_{i,j}$ est symétrique

Prop 65 : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable en $a \in U$. Alors :

(1) Si f admet un minimum local en a alors $\nabla f(a) = 0$ et $\nabla^2 f(a)$ est positive.

(2) Si $\nabla f(a) = 0$ et $\nabla^2 f(a)$ est définie positive alors f admet en a un minimum local strict.

C-Ex 66 : $f(x,y) = x^2 - y^3$. $\nabla^2 f(0,0) = 0$ et $(0,0)$ n'est pas un minimum local.

Ex 67 : $f(x,y) = x^2 - y^2 + (y^4/4)$. Alors f n'admet pas d'extremum en $(0,0)$ et f admet des minima locaux en $(0, \pm\sqrt{2})$.

On s'intéresse à présent à : $f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$ pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$.

Intérêt : Si x_0 est un minimum de f, $\nabla f(x_0) = 0 = Ax_0 - b$ et alors x_0 est solution de $Ax_0 = b$

Pour $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on définit l'algorithme suivant (algorithme de gradient à pas optimal) :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ x_{k+1} = x_k - \ell_k d_k \quad \text{si } \nabla f(x_k) \neq 0 \end{cases}$$

où $d_k = \nabla f(x_k) = Ax_k - b$, $\ell_k = \dfrac{\|\nabla f(x_k)\|^2}{\langle A\nabla f(x_k), \nabla f(x_k)\rangle}$

Lemme 68 : (Lemme de Kantorovitch)

Pour tout $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ ses valeurs propres, on a :

$\forall x \in \mathbb{R}^n$: $\|x\|^4 \leq \langle Bx, x\rangle \langle B^{-1}x, x\rangle \leq \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}} + \sqrt{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}}\right)^2 \|x\|^4$

Prop 69 : Pour $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, la fonction f admet un unique minimum, noté $\overline{x}$. On pose $\overline{f} = f(\overline{x})$ et $C(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$ le conditionnement de A, alors la suite $(x_k)_k$ donnée par la méthode de gradient à pas optimal vérifie :

* $0 \leq f(x_k) - \overline{f} \leq (f(x_0) - \overline{f}) \left(\frac{C(A)-1}{C(A)+1}\right)^{2k}$.
* $\|x_k - \overline{x}\| \leq \left(\frac{2(f(x_0) - \overline{f})}{\lambda_n}\right)^{1/2} \left(\frac{C(A)-1}{C(A)+1}\right)^k$.

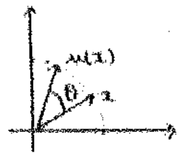
En particulier, $(x_k)_k$ converge vers $\overline{x}$

⊕ Moindres carrés.

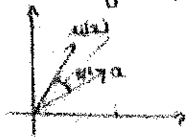
ANNEXE

App 31

i) Rotation d'angle θ et de centre O

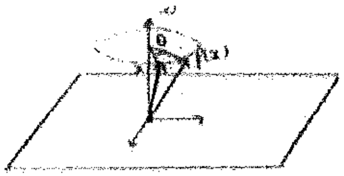


ii) Symétrie orthogonale par rapport à la droite d'angle $\theta/2$



App 32

i) Rotation autour de l'axe $\mathrm{Vect}(w)$ d'angle θ



ii) Rotation autour de l'axe $\mathrm{Vect}(w)$ d'angle θ suivie d'une symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}(w)^{\perp}$

$f(x)$

$SO_3(\mathbb{R})$ est simple

(i) $SO_3(\mathbb{R})$ est compact (dim finie)

(ii) $SO_3(\mathbb{R})$ est cpa. $S(t) := \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & R_{\theta t} \end{array}\right]$ Relie I_d à tout élément $\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & R_\theta \end{array}\right]$.

(iii) $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

Soit $H \subset SO_3(\mathbb{R})$ sous gpe non trivial.

* Montrer que H contient un renversement. [i ~~pa~~ et ii].
* Montrer que H contient tout les renversements.

SO_2 n'est pas simple : abélien

SO_4 non plus (à cause de ~~...~~ PSO_4)

sinon les PSO_n sont simples ?

Dans $\mathbb{C}$, matrice non diagonalisable $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} i & \frac{i+1}{2} \\ \frac{i+1}{2} & 1 \end{pmatrix}$