Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie)

160

Soit E un espace vectoriel euclidien, muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)$.

I – Endomorphisme adjoint

1. Définition de l'adjoint

[Gr] p.238 **Déf. 1** : Soit $f \in End(E)$, il existe un unique endomorphisme f^* de E tq : $(f(x), y) = (x, f^*(y))$, $\forall x, y \in E$.
f^* est appelé adjoint de f.

[Go] p.269 **Ex** : $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(M,N) = tr({}^tMN)$ $\quad \varphi_A : M \longrightarrow {}^tAMA$
alors $\varphi_A^* = \varphi_{{}^tA}$

[Gr] p.238 **Prop. 2** : Si M est la matrice de f dans une base orthonormée, alors la matrice de f^* dans cette base est ${}^tM$.

[Gr] p.238 **Prop. 3** :
- $* : \begin{array}{l} End(E) \longrightarrow End(E) \\ f \longmapsto f^* \end{array}$ est linéaire et involutive.
- $\forall f, g \in End(E)$, $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ $\quad rg(f^*) = rg(f)$ $\quad \det(f^*) = \det(f)$
- $Ker(f)^\perp = Im(f^*)$ $\quad Im(f)^\perp = Ker(f^*)$

2. Adjoints remarquables

[Go] p.258 **Déf. 4** : $f \in End(E)$ est dit **normal** si f et f^* commutent.
$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est normale si M et ${}^tM$ commutent.

Ex : les endomorphismes définis ci-dessous :

Déf. 5 : f est symétrique si $f^* = f$. On note $S(E)$ l'ensemble de tels f.
M est symétrique si ${}^tM = M$. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble de telles M.
- f est antisymétrique si $f^* = -f$. On note $\mathcal{A}(E)$ l'ensemble correspondant.
M est antisymétrique si ${}^tM = -M$. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble correspondant.
- Si $f^* \circ f = id = f \circ f^*$, f est orthogonal. On note $O(E)$ l'ensemble de tels f.
de même $O_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,/\, {}^tMM = I_n = M{}^tM\}$ est l'ensemble des matrices orthogonales

Prop. 6 : $S(E)$, $\mathcal{A}(E)$, $O(E)$ (et leurs analogues matriciels) sont des groupes.

Rmq : l'ensemble des matrices normales n'est pas un groupe.
$Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A = S + Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
$${}^tAA - A{}^tA = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$$

II – Endomorphismes normaux et réduction

1. Premières propriétés

Prop. 7 : $f \in End(E)$ est normal **ssi** $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|f^*(x)\|$. [Go] p.258

Prop. 8 : $f \in End(E)$ normal, F sev f-stable. Alors $F^\perp$ est f^*-stable.

Application
Prop. 9 : $f \in End(E)$ normal. Soit E_λ un sous-espace propre de f.
Alors $E_\lambda^\perp$ est f-stable.

important.

2. Réduction

Thm. 10 : Soit $f \in End(E)$ normal, alors il existe une BON de E, $\mathcal{B}$, [Go] p.220
telle que
$$mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & \tau_1 & \\ 0 & & & & \ddots \ \tau_s \end{pmatrix}$$
avec $\forall i$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$
$\forall j$ $\tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

- De même, si M est une matrice normale, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots \lambda_r & & \\ & & \tau_1 & \\ 0 & & & \ddots \ \tau_s \end{pmatrix} {}^tP$

Rmq : le lien entre "$\mathcal{B}$ est une BON" et "$P \in O_n(\mathbb{R})$" sera expliqué en prop. 14.

Application :
Thm. 11 : si $f \in \mathcal{A}(E)$, il existe une BON de E, $\mathcal{B}$, [Go] p.261
telle que
$$mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \tau_1 & \\ 0 & & & & \ddots \ \tau_s \end{pmatrix}$$
avec $\forall i$ $\tau_i = \begin{pmatrix} 0 & -b_i \\ b_i & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

- De même, si $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ alors elle est orthogonalement semblable à une matrice de ce type.

Cor. 12 : si $\dim(E)$ est impair et $f \in \mathcal{A}(E)$, alors $\det(f) = 0$. [Go] p.262

III - Endomorphismes Orthogonaux

1. Quelques propriétés

Prop. 13 : On a équivalence entre : [Gr] 239

(i) $f \in \mathcal{O}(E)$

(ii) $\forall x, y \in E$, $(f(x), f(y)) = (x, y)$

(iii) $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$

(iv) si $\mathcal{B}$ est une BON, $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

Rmq : $\mathcal{O}(E)$ est l'ensemble des isométries linéaires.

Attention, les translations ne sont pas dans $\mathcal{O}(E)$, elles sont affines.

Prop. 14 : $f \in \mathrm{End}(E)$ est orthogonal ssi il transforme toute BON en BON ssi il transforme une BON en BON. [Gr] 240

- la matrice de passage d'une BON à une BON est orthogonale.

Prop. 15 : Soit $f \in \mathcal{O}(E)$, alors $Sp(f) \subset \{-1, +1\}$ et $\det(f) = \pm 1$ [Gr] 235

Attention $\det\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} = 1$ mais $\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} \notin \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$

Application :

Déf. 16 : les transformations orthogonales de déterminant 1 sont dites directes. Les autres sont indirectes. [Gr] 235

- $SO(E)$ l'ensemble des transformations orthogonales directes. $SO_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \,/\, \det(M) = 1\}$
- Ces ensembles sont les groupes spéciaux orthogonaux.

Prop. 17 : $SO(E) \lhd \mathcal{O}(E)$ et $SO_n(\mathbb{R}) \lhd \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ [Gr] 241

Thm. 18 : Soit $f \in \mathcal{O}(E)$, il existe une BON de E, $\mathcal{B}$, telle que [Gr] 256

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & R_{\theta_r} & & & \\ & & & \varepsilon_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \varepsilon_s \end{pmatrix}$$

avec $\forall i, \varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ et $\forall j$, $R_{\theta_j} = \begin{pmatrix}\cos(\theta_j) & -\sin(\theta_j)\\ \sin(\theta_j) & \cos(\theta_j)\end{pmatrix}$

$\theta_j \in \mathbb{R}$, $\theta_j \not\equiv 0 [\pi]$.

- De même, $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est orthogonalement semblable à une telle matrice.

2. Application en dimension 2 et 3

Prop. 19 : $SO_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}, \theta \in [0, 2\pi[\right\}$ rotation d'angle θ autour de 0. [Gr] p. 241

$\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{pmatrix}, \theta \in [0, 2\pi[\right\}$ symétrie orthogonale

Cf annexe 1

Prop. 20 : Toute matrice $M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ est orthogonalement semblable à une matrice $\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0\\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon\end{pmatrix}$ [Gr] p. 243

avec $\varepsilon = 1$ si $M \in SO_3(\mathbb{R})$ (rotation) et $\varepsilon = -1$ sinon (rotation et symétrie).

Cf annexe 2

Application : $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$. $A \in SO_3(\mathbb{R})$ [Gr] p. 245

$E_1 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. $\mathrm{Tr}(A) = 2 = 1 + 2\cos(\theta)$ donc $\theta = \pm \frac{\pi}{3}$

Soit $u \in E_1^{\perp}$, par exemple $u = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$. $f(u) = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

On a $\sin(\theta) = \dfrac{\det\left(u, f(u), \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)}{\|u\|^2 \left\|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\|} > 0$. Donc $\theta = \frac{\pi}{3}$

A représente la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$, d'axe dirigé par $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

3. Propriétés algébriques et topologiques

Prop. 21 : $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ sont des groupes compacts.

Prop. 22 : $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arc. $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ admet deux composantes connexes, homéomorphes à $SO_n(\mathbb{R})$. [MT] p. 34

Prop. 23 : $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est engendré par les réflexions orthogonales (symétrie par rapport à un hyperplan). [H2G2] p. 239 [Ta] p. 51

$SO_n(\mathbb{R})$ est engendré par les retournements orthogonaux (symétrie par rapport à un sev de codim 2).

Prop. 24 : Tout sous-groupe compact maximal de $GL_n(\mathbb{R})$ est conjugué à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. [FGN] p. 231

Prop. 25 : $\exp : \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow SO_n(\mathbb{R})$ est surjective. [FGN] p. 65

Prop. 26 : $SO_3(\mathbb{R})$ est simple. $\boxed{\text{DVP}}$ [H2G2] p. 239

IV- Endomorphismes Symétriques

1. Propriétés et Réduction

[Gr] p.252

Prop. 27: $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

Thm. 28: soit $f \in S(E)$, alors il existe une BON, $\mathcal{B}$, de vecteurs propres pour f, telle que
$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \forall i$$

De même si $M \in S_n(\mathbb{R})$ elle est orthogonalement semblable à une matrice diagonale réelle.

Application:

Déf. 29: $M \in S_n(\mathbb{R})$ est positive si $\forall x \in \mathbb{R}^n$, ${}^t x M x \geq 0$. On note $M \in S_n^+(\mathbb{R})$.
$M \in S_n^+(\mathbb{R})$ est définie positive si de plus $({}^t x M x = 0) \Rightarrow (x = 0)$. On dit $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

[Gr] p.254

Prop. 30: $M \in S_n(\mathbb{R})$ est une matrice de produit scalaire ssi $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ ssi $Sp(M) \subset \mathbb{R}_+^*$

[Go] p.244

- Si ϕ est une forme quadratique sur E, alors il existe une BON dans laquelle la matrice de ϕ est diagonale réelle.

[Gr] p.255

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $Sp(A) = \{2, 2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}\} \subset \mathbb{R}_+^*$
donc A définit un produit scalaire.

2. Décomposition polaire

[Go] p.246

Lemme 31: $f, g \in S(E)$ tq $fg = gf$. Alors f et g se diagonalise dans une même base, de vecteurs propres, orthonormée.

[MT] p.19

Thm. 32: l'application $O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.
$(O, S) \longmapsto OS$

Applications:

[FGN] p.130

- **Prop. 33:** Les points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{L}(E)$ sont exactement $O(E)$. $\boxed{\text{DVP}}$

[FGN] p.229

- Ellipsoïde de John-Loewner: K compact de $\mathbb{R}^n$, tq $\mathring{K} \neq \emptyset$. Il existe un unique ellipsoïde centré en 0, de volume minimal, contenant K.

3. Autres applications

[Go] p.245

Prop. 34: Soit $M \in S_n^+(\mathbb{R})$ alors il existe une unique $R \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = M$.

[MT] p.61

Prop. 35: $\exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme. $\boxed{\text{DVP}}$

[FGN] p.142

Thm. 36 (Minimax de Courant-Fischer)
Soit $f \in S(E)$, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ ses valeurs propres. Soit A_h l'ensemble des sev de E de dimension h. Alors on a:
$$\forall h, \quad \lambda_h = \min_{F \in A_h} \left[\max_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} (f(x), x) \right] = \max_{F \in A_{n-h+1}} \left[\min_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} (f(x), x) \right]$$

Références:

[Go] X. Gourdon, Algèbre

[Gr] J. Grifone

[FGN] Oraux X-ENS Algèbre 3

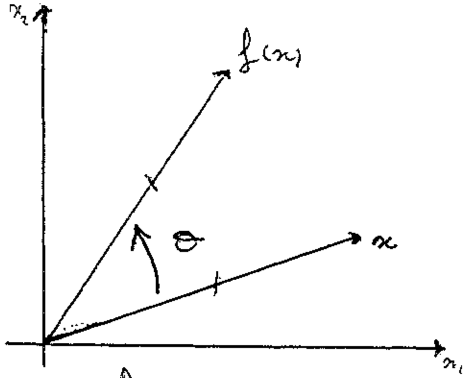
[MT] R. Mneimné, F. Testard,

[H2G2] P. Caldero, J. Germoni, Histoires hédonistes de groupes et de géométries

[Au] M. Audin, Géométrie

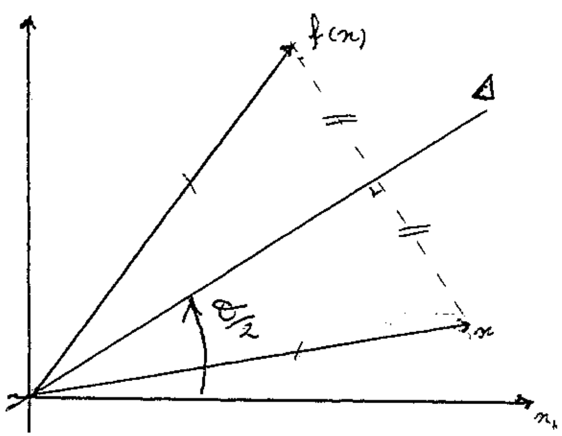
[Ta] P. Tauvel, Algèbre

Annexe 1.



$f \in SO(\mathbb{R}^2)$

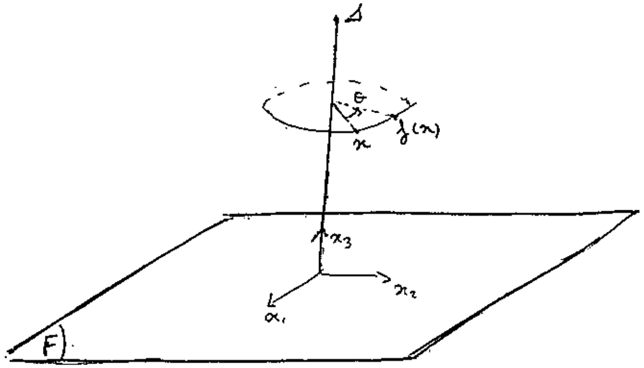
rotation d'angle θ



$f \in O(\mathbb{R}^2) \setminus SO(\mathbb{R}^2)$

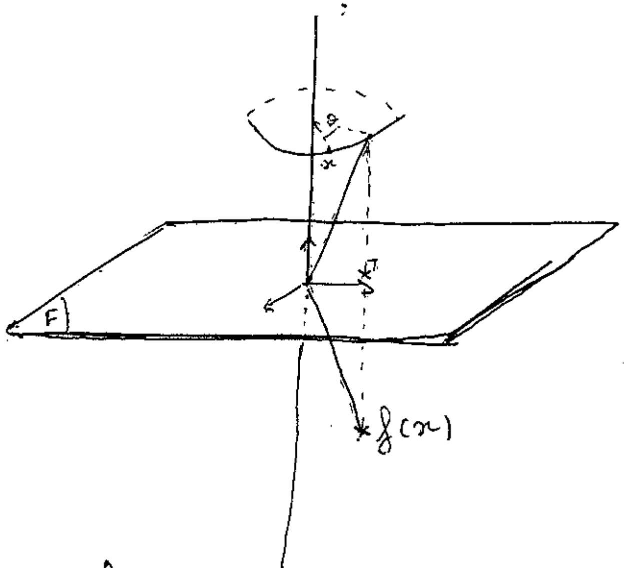
symétrie par rapport à (Δ)

Annexe 2.



$f \in SO(\mathbb{R}^3)$

rotation d'axe (Δ) et d'angle θ.



$f \in O(\mathbb{R}^3) \setminus SO(\mathbb{R}^3)$

composée d'une rotation d'axe Δ et angle θ avec une symétrie par rapport à F.

Exponentielle des matrices symétriques

Baptiste Huguet et Adrien Laurent

Références : : Mneimné, Testard, *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*

Théorème 1

L'application exp *réalise un homéomorphisme de* $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ *sur* $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Démonstration : • Montrons que l'image d'une matrice symétrique est une matrice symétrique définie positive.
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. La matrice A est orthodiagonalisable en base orthonormée. On dispose de $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et d'une matrice diagonale réelle D telles que l'on ait : $A = PD{}^tP$. On a donc : $e^A = Pe^D{}^tP$. D'où il vient que $e^A = {}^t(e^A)$ et que les valeurs propres de de e^A sont les exponentielles (réelles) des valeurs propres de A et sont donc réelles strictement positives. Ainsi e^A est bien symétrique définie positive.

• Surjectivité.

Soit $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On dispose de $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que l'on ait : $B = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} {}^tP$,
avec les $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des réels strictement positifs.
On définit la matrice A comme suit : $A := P \begin{pmatrix} \ln(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \ln(\lambda_n) \end{pmatrix} {}^tP$. De manière directe on vérifie que $e^A = B$ et que A est une matrice symétrique.

• Injectivité.
Soit A et $\hat{A}$ deux matrices symétriques réelles telles que l'on ait : $e^A = e^{\hat{A}}$. En particulier e^A et $e^{\hat{A}}$ ont le même spectre. Or les éléments du spectre de e^A sont exactement les exponentielles des éléments de spectre de A. Et il en est de même pour B. Ainsi A et B ont le même spectre. On note $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ ce spectre. Soit Π un polynôme interpolateur tel que l'on ait : $\forall i \in [\![1, n]\!], \Pi(e^{\lambda_i}) = \lambda_i$.
On montre facilement que $\Pi(e^{\hat{A}}) = \hat{A}$. Donc $\Pi(e^A) = \hat{A}$. De plus A et e^A commutent car e^A est un polynôme en A. Ainsi A et $\hat{A}$ commutent. Étant symétriques, ces deux matrices sont codiagonalisables (dans une base orthonormées commune de vecteurs propres). On dispose de $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que l'on ait : $A = P \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} {}^tP$ et $\hat{A} = P \begin{pmatrix} \beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n \end{pmatrix} {}^tP$,
avec $\{\alpha_i / 1 \leqslant i \leqslant n\}$ et $\{\beta_i / 1 \leqslant i \leqslant n\}$ égaux à $\{\lambda_i / 1 \leqslant i \leqslant n\}$. De plus par passage à l'exponentielle, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a : $e^{\alpha_i} = e^{\beta_i}$. Ainsi $A = \hat{A}$.

• Continuité.
L'exponentielle est la limite uniforme d'une suite de fonctions continues (car polynomiales). Elle est donc continue.[1]

• Bicontinuité.
Soit une suite $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ qui converge vers $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Par bijectivité de l'exponentielle, on dispose d'une suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et de $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que l'on ait pour tout p entier $B_p = e^{A_p}$ et $B = e^A$. Le but est de montrer que la suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers A. on aura donc prouvé la continuité séquentielle de l'inverse de l'exponentielle, et donc sa continuité.

La suite $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers B donc la suite de polynôme caractéristique $(\chi_{B_p})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers χ_B. En effet on a continuité de la fonction suivante : $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}[X] \\ M & \mapsto & \det(M - XI_n) \end{array}$.
D'après le théorème de Rouché[2], les valeurs propres de B_p convergent vers les valeurs propres de B. Ainsi les valeurs propres des B_p sont contenues dans un compact de $\mathbb{R}^{+*}$. Les valeurs propres des A_p étant les logarithmes (réels) des valeurs propres des B_p, elles sont aussi contenues dans un compact de $\mathbb{R}$.

Pour tout entier p, on dispose de $Q_p \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et D_p une matrice diagonale telles que l'on ait : $A_p = Q_p D_p {}^t Q_p$. Les suites $(D_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(Q_p)_{p\in\mathbb{N}}$ sont dans des compacts de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La suite $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est donc une suite dans un compact. Elle admet donc des valeurs d'adhérences. Soit φ une extractrice telle que $A_{\varphi(p)} \to \tilde{A}$. Par continuité de l'exponentielle, on a : $e^{\tilde{A}} = e^A$. Par injectivité de l'exponentielle, $\tilde{A} = A$. Ainsi $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite dans un compact, qui admet une unique valeur d'adhérence, donc elle converge vers cette valeur d'adhérence. $A_p \to A$. Donc l'exponentielle est bien bicontinue.

Ainsi $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ réalise bien un homéomorphisme.

□

1. En réalité elle est même analytique.
2. [MT] chap 2, exo 18

Points extrémaux de la boule unité de $\mathcal{L}(E)$

Baptiste Huguet et Adrien Laurent

Références : Francinou, Gianella, Nicolas, *Oraux X-ENS - Algèbre 3*

On considère ici la norme subordonnée associée à la norme euclidienne sur E. On rappelle qu'un espace euclidien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire de dimension finie (notée n ici).

Théorème 1

Soit E un espace euclidien et $B = \{u \in \mathcal{L}(E), |||u||| \leqslant 1\}$, alors les points extrémaux de B sont les éléments de $\mathrm{O}(E)$.

On rappelle qu'un point extrémal u de B est un point tel que $B \setminus \{u\}$ est convexe. Sur un dessin, on voit que les points extrémaux de la boule unité de $\mathbb{R}^2$ sont les points du cercle.

Démonstration : Soit $u \in \mathrm{O}(E)$, comme $|||\mathrm{O}(E)||| = \{1\}$, on a bien $u \in B$.
Supposons que $u = \frac{1}{2}(v+w)$ avec $v, w \in B$. Si on montre que cela implique $v = w$, on aura fini. En effet, si $B \setminus \{u\}$ n'était pas convexe, on pourrait trouver un segment $[v, w]$ contenant u et dont les bords sont dans $B \setminus \{u\}$. Quitte à découper notre segment, on peut se ramener au cas où u est au milieu du segment, c'est à dire $u = \frac{1}{2}(v+w)$. Donc si on prouve que $v = w = u$, on aura une absurdité.
Soit x de norme 1, alors $1 = \|x\| = \|u(x)\| \leqslant \frac{1}{2}(\|v(x)\| + \|w(x)\|) \leqslant \frac{1}{2}(|||v||| + |||w|||) \leqslant 1$.
On a donc égalité ! En particulier, pour tout x unitaire, $\|v(x) + w(x)\| = \|v(x)\| + \|w(x)\|$. Donc $v(x) = \lambda_x w(x)$ avec $\lambda_x > 0$ [1]. Or $\|v(x)\| = \|w(x)\| = 1$ donc $\lambda_x = 1$.
$v(x) = w(x)$ pour tout x unitaire donc par linéarité, $v = w$ et u est bien un point extrémal de B.

Réciproquement, soit $u \in B$ tel que $u \notin \mathrm{O}(E)$. Montrons que u n'est pas extrémal.
On note A la matrice de u dans une base orthonormée de E. En utilisant la décomposition polaire (sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut écrire $A = OS$ avec $O \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
En utilisant le théorème de réduction des matrices symétriques, on a $S = PD{}^{\mathrm{t}}P$ avec $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{Diag}(d_1, ..., d_n)$ avec $0 \leqslant d_1 \leqslant ... \leqslant d_n$.
De plus, $|||A||| = |||OS||| = |||S||| = \sqrt{d_n^2} = d_n$ [2] et $u \in B$ donc $|||A||| \leqslant 1$. Donc $\forall i$, $d_i \in [0, 1]$.
Par hypothèse, A n'est pas orthogonale, donc $S \neq I_n$, donc $d_1 < 1$. On peut donc écrire $d_1 = \frac{a+b}{2}$ où $-1 \leqslant a < b \leqslant 1$ (on prend $a \geqslant -1$ et pas $a \geqslant 0$ pour le cas où $d_1 = 0$).
On pose alors $D_1 = \mathrm{Diag}(a, d_2, ..., d_n)$ et $D_2 = \mathrm{Diag}(b, d_2, ..., d_n)$.
On a $D_1 \neq D_2$ et $A = \frac{1}{2}(OPD_1{}^{\mathrm{t}}P + OPD_2{}^{\mathrm{t}}P)$.
Ici on est plutôt content, on a écrit A comme le milieu d'un segment. Néanmoins, il faut encore montrer que les bornes de ce segment sont dans B.
Soit X de norme 1, alors $\|OPD_i{}^{\mathrm{t}}PX\|^2 = {}^{\mathrm{t}}XPD_i{}^{\mathrm{t}}P{}^{\mathrm{t}}OOPD_i{}^{\mathrm{t}}PX = {}^{\mathrm{t}}(PX)D_i^2(PX)$.
Or $\|PX\| = 1$ car P est orthogonale et X est unitaire.

1. En effet, on a $\|v(x) + w(x)\|^2 = \|v(x)\|^2 + \|w(x)\|^2 + 2\|v(x)\|\|w(x)\| = \|v(x)\|^2 + \|w(x)\|^2 + 2(v, w)$. Donc $(v, w) = \|v(x)\|\|w(x)\|$. L'égalité dans Cauchy-Schwar z donne que $v(x) = \lambda_x w(x)$.
Puis $\|w(x)\|^2 \lambda_x = (v, w) = \|v(x)\|\|w(x)\| \in \mathbb{R}^+$, donc λ_x est positif.

2. On rappelle que sur les matrices, la norme 2 donne $|||M||| = \sqrt{\rho({}^{\mathrm{t}}MM)}$ où ρ est le rayon spectral, c'est à dire la valeur propre maximale.

En notant $Y = PX$, on a ${}^tYD_i^2Y = \sum_{j=2}^n d_j^2 y_j^2 + d_i^0 y_1^2$ avec $d_i^0 = a^2$ si $i = 1$ et b^2 si $i = 2$.
De plus, les coefficients de D_i^2 sont tous compris entre 0 et 1, donc ${}^tYD_i^2Y \leqslant \sum_{j=1}^n y_j^2 = 1$. On en déduit que $OPD_1{}^tPX$ et $OPD_2{}^tPX$ sont dans B.
Donc $A = \frac{1}{2}(OPD_1{}^tP + OPD_2{}^tP)$ est le milieu de deux éléments distincts de B. Donc A n'est pas un point extrémal ! $\square$

Remarques :

- Un théorème de Krein-Milman affirme qu'un convexe compact de $\mathbb{R}^n$ est toujours l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses points extrémaux (voir FGN analyse 3). Donc ici, la boule unité de $\mathcal{L}(E)$ est l'enveloppe convexe de $\mathrm{O}(E)$.
- En dimension 1, le résultat est simple. En effet, $\mathcal{L}(E)$ s'identifie à $\mathbb{R}$ et B au segment $[-1, 1]$. D'autre part, $\mathrm{O}(E)$ n'est constitué que de $\pm I_1$ soit 1 et -1.
- En dimension 2, $\mathrm{O}(E)$ s'identifie à deux cercles disjoints : l'un représentant l'ensemble des angles des rotations de $\mathrm{SO}(E)$ et l'autre représentant l'ensemble des angles des axes de symétries de $\mathrm{O}(E) \setminus \mathrm{SO}(E)$. B s'identifie donc à un compact convexe de dimension 4 tel que ses points extrémaux soient deux cercles.

Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$

Baptiste Huguet et Adrien Laurent

Références : Caldero, Germoni, *Histoires hédonistes de groupes et de géométrie*

On va commencer par prouver quelques propriétés sur $SO_n(\mathbb{R})$ que l'on utilisera dans la suite pour prouver la simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$. On conclura sur l'éventuelle simplicité des autres groupes spéciaux orthogonaux.

Théorème 1

$SO_n(\mathbb{R})$ est compact et connexe (par arcs).

Démonstration : 1) On pose l'application ϕ qui à $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe ${}^tMM$. Elle est continue car chacune des composantes est un polynôme en les coefficients de la matrice en entrée. Donc $SO_n(\mathbb{R}) = \phi^{-1}\{I_n\} \cap \det^{-1}\{1\}$ est fermé.
D'autre part, on prend la norme liée au produit scalaire $(A, B) = \mathrm{Tr}({}^tAB)$ sur l'espace des matrices et on remarque que $\|M\| = \sqrt{\mathrm{Tr}({}^tMM)} = \sqrt{n}$ pour $M \in SO_n(\mathbb{R})$. Donc $SO_n(\mathbb{R})$ est borné (pour toute norme car elles sont équivalentes).
Comme on est en dimension finie, $SO_n(\mathbb{R})$ est compact.

2) Continuons avec la connexité. Soit $M \in SO_n(\mathbb{R})$, on va créer un chemin continu liant M à I_n. Ainsi on pourra relier deux matrices par un chemin continu en passant par l'identité.
Le théorème de réduction donne l'existence d'une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que

$$M = P \begin{pmatrix} I_r & & & & \\ & -I_{2p} & & & \\ & & R_{\theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R_{\theta_s} \end{pmatrix} {}^tP \text{ avec } R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

On pose alors pour $t \in [0,1]$, $N(t) = \begin{pmatrix} I_r & & & & & & \\ & R_{t\pi} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & R_{t\pi} & & & \\ & & & & R_{t\theta_1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & R_{t\theta_s} \end{pmatrix}$.

Ainsi $\gamma(t) := PN(t){}^tP$ est une application continue de $[0,1]$ dans $SO_n(\mathbb{R})$ qui relie M à I_n. $\square$

On peut maintenant prouver le théorème suivant.

Théorème 2

$SO_3(\mathbb{R})$ est un groupe simple.

Démonstration : Soit $H \lhd SO_3(\mathbb{R})$ non trivial, il nous faut montrer que $H = SO_3(\mathbb{R})$. Or les retournements engendrent $SO_3(\mathbb{R})$ [1]. De plus, ils sont conjugués dans $SO_3(\mathbb{R})$ (donc l'ensemble

1. On admettra que les retournements engendrent $SO_n(\mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

des retournements est stable par automorphisme intérieur). On en déduit que si H contient un retournement, comme il est distingué, il les contient tout et donc $H = SO_3(\mathbb{R})$.

- Pourquoi les retournements sont-ils conjugués ?

Soient r_D et $r_{D'}$ deux retournements de droites respectives D et D'. On pose d et d' deux vecteurs unitaires engendrant chacun leur droite associée. On peut ensuite trouver une base orthonormée de $D^\perp$: (e_1, e_2) (et de même on peut trouver (e'_1, e'_2) base de $D'^\perp$). Finalement on obtient deux bases orthonormées (d, e_1, e_2) et (d', e'_1, e'_2). La matrice de passage de l'une à l'autre est donc orthogonale. Quitte à poser $d'' = -d'$, on a une matrice de passage de déterminant 1, donc dans $SO_3(\mathbb{R})$.

- Pourquoi H contient-il un retournement ?

Soit $h \in H$ non trivial, on pose $\phi : \begin{array}{ccc} SO_3(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & \mathrm{Tr}(ghg^{-1}h^{-1}) \end{array}$.

- $\phi(I_3) = 3$ donc $3 \in \mathrm{Im}(\phi)$,
- $SO_3(\mathbb{R})$ est connexe donc $\phi(SO_3(\mathbb{R}))$ est un intervalle contenant 3,
- $SO_3(\mathbb{R})$ est compact donc $\phi(SO_3(\mathbb{R})) = [a, b]$ avec $a \leqslant 3 \leqslant b$,
- la trace d'un élément de $SO_3(\mathbb{R})$ est de la forme $1 + 2\cos(\theta)$, donc $\phi(SO_3(\mathbb{R})) = [a, 3]$ avec $a \in [-1, 3]$.

Supposons que $a = 3$, alors $\forall g \in SO_3(\mathbb{R})$, $ghg^{-1}h^{-1} = I_3$ (le théorème de réduction donne qu'il y a une unique matrice de $SO_3(\mathbb{R})$ de trace 3). Donc $h \in Z(SO_3(\mathbb{R}) = I_3$ [2]. C'est absurde !

Donc $a < 3$, donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a < 1 + 2\cos(\frac{\pi}{n}) < 3$ (car $3 = \lim_{n\to\infty} 1 + 2\cos(\frac{\pi}{n})$). On note g_n tel que $\phi(g_n) = 1 + 2\cos(\frac{\pi}{n})$. Alors $h_n := g_n h g_n^{-1} h^{-1} \in H$ (car $h^{-1} \in H$ et $g_n h g_n^{-1} \in H$ car H est distingué) et est une rotation d'angle $\pm\frac{\pi}{n}$.
Donc h_n^n est dans H et est une rotation d'angle π, donc un retournement. □

Remarque : qu'en est-il des autres groupes spéciaux orthogonaux ?
Si n est pair, $< \pm I_n > \lhd SO_n(\mathbb{R})$ donc $SO_n(\mathbb{R})$ n'est pas simple. On pose ainsi naturellement les groupes $PSO_n(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{array}{ll} SO_n(\mathbb{R})/ < \pm I_n > & \text{si n est pair} \\ SO_n(\mathbb{R}) & \text{si n est impair} \end{array} \right.$.
On peut alors montrer (mais c'est difficile) que $PSO_n(\mathbb{R})$ est simple pour $n = 3$ et $n \geqslant 5$. C'est faux pour $n = 4$ car $PSO_4(\mathbb{R}) \simeq SO_3(\mathbb{R}) \times SO_3(\mathbb{R})$ (en le faisant agir sur les quaternions, fait dans H2G2). Pour $n = 2$, $SO_2(\mathbb{R})$ est abélien donc $PSO_2(\mathbb{R})$ aussi ; en particulier, il n'est pas simple.

2. En effet, soit $u \in Z(SO_3(\mathbb{R}))$, alors pour toute droite D de l'espace, si on note r_D le retournement de droite D, on a $r_D = u r_D u^{-1} = r_{u(D)}$. On en déduit $D = u(D)$ pour toute droite D de l'espace. C'est un exo de sup classique de montrer qu'alors, u est une homothétie. Il n'y a qu'une homothétie dans $SO_3(\mathbb{R})$, c'est l'identité.