159

Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Cadre : $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

I/ Généralités

1) Bases duale et antéduale

Def 1.1 : Une forme linéaire de E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Ex 1.2 : $f_k : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ (x_i)_i \mapsto x_k \end{array}$ est une forme linéaire de $\mathbb{R}^n$.

Ex 1.3 : Si E est un espace de fonctions réelles différentiables, la différentielle est une forme linéaire de E.

Def 1.4 : Un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.

Ex 1.5 : $\mathrm{vect}((1,-1))$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^2$.

Def 1.6 : Le dual de E, noté E^*, est l'ensemble des formes linéaires de E.

Prop 1.7 : E^* est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

Def 1.8 : Pour $(e_i)_i$ une base de E, on note $e_k^* \in E^*$ la forme linéaire : $\sum_i \lambda_i e_i \mapsto \lambda_k$.

Prop 1.9 : $(e_i^*)_i$ forme une base de E^*, appelée base duale.

Prop 1.10 : Pour $(f_i)_i$ une base de E^*, il existe une unique base $(e_i)_i$ de E telle que $\forall k$, $e_k^* = f_k$, c'est la base antéduale.

2) Isomorphismes $E \cong E^*$

Prop 1.11 : Il n'existe pas d'isomorphisme canonique $\varphi : E \to E^*$, i.e. un morphisme tel que pour toute base e de E de base duale e^*, la matrice $\mathrm{Mat}_{e,e^*}(\varphi)$ soit invariante.

Thm 1.12 (Riesz) : Si E est muni d'un produit scalaire, alors $\varphi : \begin{array}{l} E \to E^* \\ e \mapsto \langle e, \cdot \rangle \end{array}$ définit un isomorphisme.

Thm 1.13 (Muñoz-Bertrand) : Si $n = 0$, $\varphi : \begin{array}{l} E \to E^* \\ 0_E \mapsto 0_{E^*} \end{array}$ définit un isomorphisme. [GRO]

Thm 1.14 : $\varphi : \begin{array}{l} M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})^* \\ A \mapsto (X \mapsto \mathrm{tr}(AX)) \end{array}$ est un isomorphisme

Cor 1.15 : Soit $f \in M_n(\mathbb{K})^*$ telle que $\forall (X,Y) \in M_n(\mathbb{K})^2$, $f(XY) = f(YX)$. Alors $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall X \in M_n(\mathbb{K})$, $f(X) = \lambda \, \mathrm{tr}(X)$ [DVPT] [X-ENS]

Cor 1.16 : Si $n > 1$, tout hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$ rencontre $GL_n(\mathbb{K})$.

Prop 1.17 : L'injection $i : \begin{array}{l} E \to E^{**} \\ x \mapsto (f \mapsto f(x)) \end{array}$ est un isomorphisme si et seulement si E est de dimension finie.

II/ Orthogonalité et transposition

1) Orthogonalité en dimension finie

Def 2.1 : $x \in E$ et $f \in E^*$ sont dits orthogonaux si $f(x) = 0$

Def 2.2 : Soit $A \subset E$, $A^\perp = \{ f \in E^* \mid \forall x \in A, f(x) = 0 \}$ est un sous-espace vectoriel de E^* appelé orthogonal de A.

Def 2.3: Soit $B \subset E^*$, $B^0 = \{x \in E \mid \forall f \in B, f(x) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé orthogonal de E.

Thm 2.5: Si F est un sous-espace vectoriel de E, on a $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$.

Thm 2.5: $F^{\perp 0} = F$

Thm 2.6: Si G est un sous-espace vectoriel de E^*, on a $\dim G + \dim G^0 = \dim E^*$

Thm 2.7: $G^{0\perp} = G$

Cor 2.8: L'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires de $\mathbb{R}^n$ à p lignes, de rang r, est de dimension $n-r$.

Cor 2.9: Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension q, alors il existe $n-q$ formes linéaires linéairement indépendantes $(\varphi_i)_i$ telles que : $F = \bigcap_i \mathrm{Ker}(\varphi_i)$.

Def 2.10: Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E et ϕ sa forme quadratique associée. On note $A^\perp_\varphi = \{y \in E \mid \forall x \in A, \varphi(x,y) = 0\}$. On note aussi $\mathrm{Ker}(\phi) = E^\perp_\varphi$.

Prop 2.11: Ce sont des sous-espaces vectoriels de E.

Prop 2.12: $\dim F + \dim F^\perp = \dim E + \dim(F \cap \mathrm{Ker}(\phi))$

Prop 2.13: $F^{\perp\perp} = F + \mathrm{Ker}(\phi)$

Def 2.14: On dit que ϕ est définie si $\{x \in E \mid \phi(x) = 0\} = \{0\}$

Prop 2.15: Si $\phi_{|F}$ est définie, $F \oplus F^\perp_\varphi = E$

Prop 2.16: Si ϕ est définie, $F = (F^\perp_\varphi)^\perp_\varphi$

2) Transposition

Def 2.17: Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u : E \to F$ une application linéaire, alors la fonction $^t u : \begin{array}{l} F^* \longrightarrow E^* \\ f \longmapsto f \circ u \end{array}$ est une application linéaire, appelée transposée de u.

Prop 2.18: $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(^t u)$

Prop 2.19: $\mathrm{Im}(^t u) = (\mathrm{Ker}\, u)^\perp$

Prop 2.20: $\mathrm{Ker}(^t u) = (\mathrm{Im}\, u)^\perp$

Prop 2.21: F est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par $^t u$.

Def 2.22: Soit f un endomorphisme linéaire de E. On dit que f est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $E = \mathrm{Vect}(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$.

[VPT]
[GOU]

Thm 2.23 (réduction de Frobenius): Il existe une suite $F_1, F_2, \dots, F_r$ de sous-espaces vectoriels de E, tous f-stables, tels que :

- $E = \bigoplus_i F_i$.
- tous les $f|_{F_i}$ sont cycliques.
- Pour P_i le polynôme minimal de $f|_{F_i}$, $\forall i \in [\![1, r-1]\!]$, $P_{i+1} | P_i$.

III / Application à la dualité projective

Prop 3.1: Il existe une bijection entre l'ensemble des hyperplans de E et le dual projectif $P(E^*)$: deux formes linéaires sont proportionnelles si et seulement si elles ont même noyau.

Appli 3.2: En dimension deux, on a les correspondances suivantes :

a point de $P(E)$	A droite de $P(E^*)$
D droite de $P(E)$	d point de $P(E^*)$
$a \in D$	$A \ni d$
trois points alignés dans $P(E)$	trois droites concourantes dans $P(E^*)$
droite (ab)	point $A \cap B$

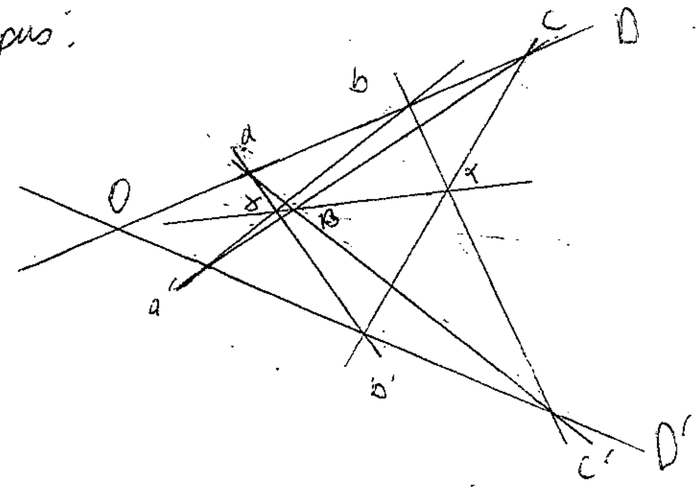
Thm 3.3 (Pappus): Soient D et D' deux droites d'un plan projectif, sécantes en O ; a, b et c trois points distincts entre eux et de O sur D ; a', b' et c' trois points de D' distincts entre eux et de O.
Alors les points $\alpha = (bc') \cap (b'c)$, $\beta = (ac') \cap (a'c)$ et $\gamma = (ab') \cap (a'b)$ sont alignés.

Cor 3.4 (Pappus dual): Soient d et d' deux points distincts d'un plan projectif. Soient A, B et C trois droites distinctes de ce plan, passant par d et distinctes de (dd') et A', B' et C' trois droites distinctes du plan et de (dd'), passant par d'. Alors les droites :

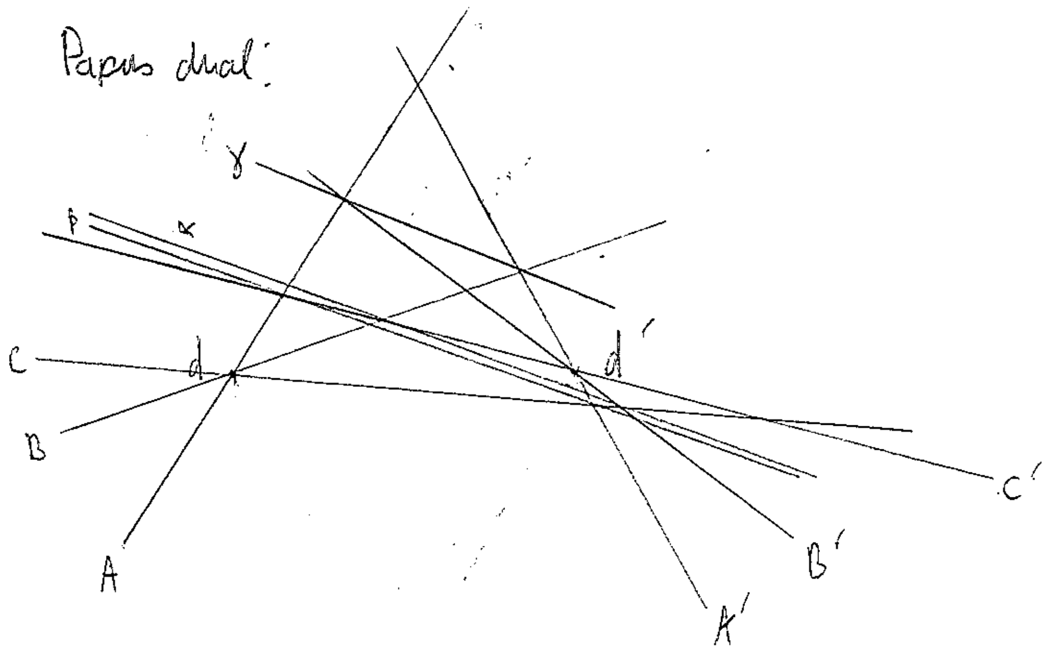
$$\alpha = \big((B \cap C')(B' \cap C)\big)$$
$$\beta = \big((A \cap C')(A' \cap C)\big)$$
$$\gamma = \big((A \cap B')(A' \cap B)\big)$$

sont concourantes. [cf. annexe 3]

Pappus :



Papus dual :



Références :

Pour le plan :

[GOU] - Xavier GOURDON - Algèbre

[GOB] - Rémi GOBLOT - Algèbre linéaire

Pour le projectif :

[AUD] - Michèle AUDIN - Géométrie

Propositions / développements :

[GRO] - Alexander GROTHENDIECK - Cohomologie locale des Faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux.

[X-ENS] - FRANCINOU, GIANELLA, NICOLAS - Algèbre 1

01/04/2015

Isomorphisme entre l'ensemble des matrices et son dual

Arnaud POINAS

1 avril 2015

Référence : Serge FRANCINOU - *Oraux X-ENS, Algèbre 1*, p.329-331.

Leçon : 159.

Énoncé : L'application

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^* \\ A & \mapsto & f_A : (X \mapsto Tr(AX)) \end{array}$$

est un isomorphisme entre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et son dual.

Preuve : Il est clair que quel que soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'application f_A : $(X \mapsto Tr(AX))$ est linéaire (et donc dans le dual). De plus, comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et son dual ont même dimension alors il suffit de montrer l'injectivité afin de démontrer le théorème. Pour cela, on prend $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $f_A = 0$. On a donc

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad Tr(AX) = 0$$

En particulier, si on pose $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors quel que soit $i_0, j_0 \in \{1 \cdots n\}$ on obtient:

$$\begin{aligned} 0 &= Tr(AE_{i_0,j_0}) \\ &= \sum_{1 \le i,j \le n} a_{i,j} Tr(E_{i,j} E_{i_0,j_0}) \\ &= \sum_{1 \le i,j \le n} a_{i,j} Tr(\delta_{i_0}^{j} E_{i,j_0}) \\ &= \sum_{1 \le i,j \le n} a_{i,j} \delta_{i_0}^{j} \delta_{j_0}^{i} \\ &= a_{i_0,j_0} \end{aligned}$$

D'où $A = 0$ ce qui prouve le théorème.

□

Voyons maintenant deux applications de ce théorème. La première application est une caractérisation de la trace.

Théorème : Soit $f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ telle que $\forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \ f(XY) = f(YX)$. Alors, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(X) = \lambda Tr(X)$ pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Preuve : D'après la première question, comme f est dans le dual de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $f = f_A$. Cela donne,

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \ Tr(AXY) = Tr(AYX).$$

En utilisant les propriétés de la trace, on obtient que $Tr(AYX) = Tr(XAY)$ d'où par linéarité

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \ Tr((AX - XA)Y) = 0.$$

Cette propriété étant vraie quel que soit $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors d'après le théorème précédant on en déduit que $AX - XA = 0$. A commute alors avec toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donc A est dans le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et donc $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_n$ ce qui donne que $f(X) = Tr(\lambda I_n X) = \lambda Tr(X)$ quel que soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$\square$

La deuxième application quant à elle nous donne une propriété des hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Théorème : Soit $n \geq 2$, alors tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $GL_n(\mathbb{K})$.

Preuve : Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est donc le noyau d'une forme linéaire f non nulle. D'après le premier théorème, il existe donc $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle telle que $f = f_A$. On cherche alors un $X \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $Tr(AX) = 0$. Pour ça, on va utiliser le pivot de Gauss. Si on appelle r le rang de A ($r \neq 0$) alors

$$\exists P, Q \in GL_n(\mathbb{K}), \quad A = PJ_rQ \text{ avec } J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas-là, quel que soit la matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a

$$Tr(AX) = Tr(PJ_rQX) = Tr(J_rQXP).$$

Donc, si on trouve un $Y \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $Tr(J_rY) = 0$ alors en posant $X = Q^{-1}YP^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$ on a bien $Tr(AX) = 0$ et donc $X \in H$. Or, la matrice de permutation

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

convient. En effet, son déterminant est ± 1 donc elle est inversible et J_rY a sa diagonale nulle donc sa trace aussi ce qui conclue la démonstration.

$\square$

Annexe : Le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des homothéties.

Preuve : On pose $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad AX = XA.$$

Alors, pour tout $i, j \in \{1 \cdots n\}$ on obtient:

$$\begin{aligned}
& AE_{i,j} = E_{i,j}A \\
\Rightarrow & \sum_{1 \leq k,l \leq n} a_{k,l} E_{k,l} E_{i,j} = \sum_{1 \leq k,l \leq n} a_{k,l} E_{i,j} E_{k,l} \\
\Rightarrow & \sum_{1 \leq k,l \leq n} a_{k,l} \delta_l^i E_{k,j} = \sum_{1 \leq k,l \leq n} a_{k,l} \delta_j^k E_{i,l} \\
\Rightarrow & \sum_{1 \leq k \leq n} a_{k,i} E_{k,j} = \sum_{1 \leq l \leq n} a_{j,l} E_{i,l}
\end{aligned}$$

Par unicité de la décomposition sous cette forme on obtient donc que $a_{k,i} = 0$ si $k \neq i$ et $a_{i,i} = a_{j,j}$ d'où $A = \lambda I_n$ en prenant $\lambda = a_{1,1}$.

$\square$

Réduction de Frobenius

Arnaud POINAS

1 avril 2015

Référence : Xavier GOURDON - *Algèbre*, p.290-291.

Leçon : 153, 154, 159.

Énoncé : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il existe une suite $F_1, F_2, \cdots, F_r$ de s.e.v. de E, tous stables par f, telle que:

1. $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_r$
2. $\forall i \in \{1 \cdots n\}$, la restriction $f_i = f|_{F_i}$ est un endomorphisme cyclique de F_i.
3. Si on pose P_i le polynome minimal de f_i, on a $P_{i+1}|P_i$ pour tout $i \in \{1, \cdots, r-1\}$

De plus, la suite de polynômes $P_1, \cdots, P_r$ ne dépend que de f et non du choix de la décomposition.

Preuve : *Existence:* On pose Π_f le polynôme minimal de f, k son degré et P_x le polynôme unitaire engendrant l'idéal $\{P \in \mathbb{K}[X] | P(f)(x) = 0\}$. On admettra le fait qu'il existe un $x \in E$ tel que $P_x = \Pi_f$. On prend un tel x et on pose le s.e.v. $F = \{P(f)(x), P \in \mathbb{K}[X]\}$. F est stable par f et comme $deg(P_x) = k$ alors F est de dimension k et admet pour base la famille de vecteurs

$$e_1 = x, \quad e_2 = f(x), \cdots, \quad e_k = f^{k-1}(x).$$

On complète cette base en une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de E et on pose $(e_1^*, \cdots, e_n^*)$ la base duale associée. On note

$$G = Vect(\Gamma)^\circ \quad \text{avec} \quad \Gamma = \{e_k^* \circ f^i, i \in \mathbb{N}\}$$

En d'autres termes, G est l'ensemble des $x \in E$ tels que la k-ième coordonnée de $f^i(x)$ (dans la base $(e_1, \cdots, e_n)$) soit nulle pour tout i. L'ensemble G est un s.e.v. de E et on montre facilement qu'il est stable par f.
Montrons que $F \oplus G = E$. Pour faire ça, montrons successivement que $F \cap G = \{0\}$ et $dim(F) + dim(G) = n$.
Soit $y \in F \cap G$. Si $y \neq 0$ alors on peut écrire $y = a_1e_1 + \cdots + a_pe_p$ avec $a_p \neq 0$ et $p \leq k$. En composant par $e_k^* \circ f^{k-p}$ on obtient

$$0 = e_k^*(a_1e_{k-p+1} + \cdots + a_pe_k) = a_p$$

ce qui est absurde donc $F \cap G = \{0\}$.
Comme $G = Vect(\Gamma)^\circ$, pour montrer que $dim(G) = n - dim(F) = n - k$ il suffit de prouver que $dim(Vect(\Gamma)) = k$. Pour ça, on considère l'application linéaire

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}_f = \{P(f), f \in \mathbb{K}[X]\} & \to & Vect(\Gamma) \\ g & \mapsto & e_k^* \circ g \end{array}.$$

Par définition de $Vect(\Gamma)$, ϕ est surjective. De plus, ϕ est injective. En effet, si $e_k^* \circ g = 0$ avec $g \neq 0$ et $g \in \mathcal{L}_f$ alors on peut écrire $g = a_1 Id_E + \cdots + a_p f^{p-1}$ avec $a \leq k$ et $a_p \neq 0$ et on obtient

$$0 = e_k^* \circ g(f^{k-p}(x)) = e_k^*(a_1 f^{k-p}(x) + \cdots + a_p f^{k-1}(x)) = e_k^*(a_1e_{k-p+1} + \cdots + a_pe_k) = a_p$$

ce qui est absurde. ϕ est donc bien un isomorphisme et donc $dim(Vect(\Gamma)) = dim(\mathcal{L}_f) = k$.
On a donc trouvé un sous-espace G stable par f tel que $F \oplus G = E$. On pose P_1 le polynôme minimal de $f|_F$ et P_2 le polynôme minimal de $f|_G$. Comme $F = \{P(f)(x), P \in \mathbb{K}[X]\}$ alors $P_1 = P_x = \Pi_f$ et comme G est stable par f alors P_2 divise $\Pi_f = P_1$. En réappliquant le résonnement précédant à $f|_G$, au bout d'un nombre fini d'étape on obtiendra alors la décomposition voulue.

Unicité: On suppose l'existence de deux suites de sous-espaces $F_1, \cdots, F_r$ et $G_1, \cdots, G_s$ tous stables par f et vérifiant les trois conditions du théorème. Posons $P_i = \Pi_{f|_{F_i}}$ et $Q_j = \Pi_{f|_{G_j}}$.
On remarque que $P_1 = \Pi_f = Q_1$. Supposons la liste $(P_1, \cdots, P_r)$ différente

de $(Q_1, \cdots, Q_s)$ et notons j le premier indice tel que $P_j \neq Q_j$. Un tel indice existe toujours car $\sum_i deg(P_i) = n = \sum_i deg(Q_j)$. Or, si on applique le fait que $P_j(f)(F_k) = 0$ pour $k \geq j$ (qui vient du fait que $P_j|P_k$ pour $k \geq j$) à l'égalité $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$ on obtient

$$P_j(f)(E) = P_j(f)(F_1) \oplus \cdots \oplus P_j(f)(F_{j-1}).$$

Par ailleurs, comme les G_j sont stables par f alors en appliquant $P_j(f)$ à l'égalité $E = G_1 \oplus \cdots \oplus G_s$ on obtient

$$P_j(f)(E) = P_j(f)(G_1) \oplus \cdots \oplus P_j(f)(G_{j-1}) \oplus P_j(f)(G_j) \oplus \cdots \oplus P_j(f)(G_s).$$

Or, quel que soit $1 \leq i \leq j-1$ on a $dim(P_j(f)(F_i)) = dim(P_j(f)(G_i))$ (car on peut trouver une base B_i de F_i et une base B'_i de G_i telles que la matrice de $f|_{F_i}$ dans B_i et celle de $f|_{G_i}$ dans B'_i soient égale à la matrice compagnon de P_j). Donc, en prenant les dimensions dans les deux égalités précédentes, on en déduit que

$$0 = dim(P_j(f)(G_j)) = \cdots = dim(P_j(f)(G_s))$$

ce qui prouve que $Q_j|P_j$ car Q_j est le polynôme minimal de $f|_{G_j}$. Par symétrie des rôles, on a aussi $P_j|Q_j$ donc $P_j = Q_j$ ce qui contredit notre assertion de départ. Finalement, on obtient bien $r = s$ et $P_i = Q_i$ pour tout i.

$\square$