156 Exponentielle de matrices. Applications.

car complet et de caractéristique nulle. ($\frac{1}{k!}$)

$K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I - L'exponentielle de matrices : définition et calcul.

Déf 1 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On note $\exp(A)$ ou e^A la somme de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{n!}$ qui est normalement convergente.

Exple 2 : $\exp\Bigg(\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}}_{\in \mathcal{M}_n(K)}\Bigg) = e^\lambda \begin{bmatrix} 1 & t & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & t \\ & & & 1 \end{bmatrix}$; $\exp\begin{bmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$

$\exp\left(\begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & *' \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$; $\exp\begin{bmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{bmatrix}$.

Prop 3 : Soit $\|\cdot\|$ une norme sous-multiplicative (ie $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$) alors $\|\exp(A)\| \leq \exp(\|A\|)$.

Prop 4 : $\exp(A)$ est un polynôme en A

Rq 5 : Il n'existe pas de polynôme P tel que $\forall A \in \mathcal{M}_n(K)$, $P(A) = \exp(A)$

Prop 6 : $AB = BA \Rightarrow \exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

Cor 7 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $\exp(A) \in GL_n(K)$ et $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

Prop 8 : Soit $P \in GL_n(K)$, $P\exp(A)P^{-1} = \exp(PAP^{-1})$.

Prop 9 : $\exp({}^tA) = {}^t\exp(A)$.

Prop 10 : $\det(\exp(A)) = \exp(\operatorname{Tr} A)$.

Prop 11 : $\exp(A) = \lim_{k\to\infty} \left(I_n + \frac{A}{k}\right)^k$.

démo en trigonalisant sur $\mathbb{C}$, ou faire un DL de det (prop 11).

Prop 12 : A diagonalisable $\Rightarrow e^A$ diagonalisable.

et, $Sp(e^A) = \{e^\lambda \,/\, \lambda \in Sp(A)\}$.

Exple 13 : $\begin{bmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2i\pi & 0 \\ 0 & -2i\pi \end{bmatrix}$ donc $\exp\begin{bmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{bmatrix} = I$

(Rappel)

Th 14 : (Dunford) Soit f un endomorphisme annulant un polynôme scindé. Alors il existe un unique couple d'endomorphismes (d,n) tel que :

$f = d + n$; $n \circ d = d \circ n$; n est nilpotent et d est diagonalisable.

De plus, d et n sont des polynômes en f.

Déf 15 : On définit de la même manière l'exponentielle d'un endomorphisme.

Appli 16 : On note $F = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{n_i}$ et f un endomorphisme tel que $F(f) = 0$. Alors $E = \bigoplus_{i=1}^{s} \operatorname{Ker}(f - \lambda_i id)^{n_i}$.

On note p_i la projection sur $\operatorname{Ker}(f - \lambda_i id)^{n_i}$ adaptée à la décomposition ci-dessus.

Si $Q_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{s} (X - \lambda_j)^{n_j}$ et $\sum_{i=1}^{s} U_i Q_i = 1$ alors $p_i = U_i Q_i(f)$

On a $d = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i p_i$ et $n = \sum_{i=1}^{s} (f - \lambda_i id) p_i$ (Dunford).

Et, $\exp(f) = \exp(d)\exp(n) = \sum_{i=1}^{s} e^{\lambda_i} \left[\sum_{p=0}^{n_i - 1} \frac{(f - \lambda_i id)^p}{p!}\right] p_i$

Exple 17 : $\exp\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6e^2 + 3e^3 & -4e^2 + 4e^3 & 10e^2 - 6e^3 \\ -6e^2 + 3e^3 & -3e^2 + 4e^3 & 9e^2 - 6e^3 \\ -7e^2 + 3e^3 & -4e^2 + 4e^3 & 11e^2 - 6e^3 \end{bmatrix}$

Prop 18 : Si $A = D + N$ est la décomposition de Dunford de A alors
$$\exp(A) = e^D + e^D(e^N - I)$$ est celle de $\exp(A)$.

Coro 19 : A diagonalisable si et seulement si $\exp(A)$ l'est.

(Rappel) **Th 20** (Jordan) : Soit f un endomorphisme, on suppose son polynôme caractéristique scindé : $\chi_f = (X-\lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X-\lambda_p)^{\alpha_p}$; $\lambda_i \neq \lambda_j$
Il existe une base $\mathcal{B}$ telle que
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{Diag}\Big(\underbrace{\tilde{J}_1(\lambda)}_{\alpha_1} \Big| \dots \Big| \underbrace{\tilde{J}_p(\lambda)}_{\alpha_p}\Big)$$ (voir annexe)

Expl 21 : $M = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad e^M = P\begin{bmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & e \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}P^{-1}$

II - Topologie et exponentielle

II. ... Régularité de l'exponentielle de matrices

Th 22 : $\exp : \mathcal{M}_n(K) \to GL_n(K)$ est analytique.
$D\exp(0) = I$

Coro 23 : Il existe deux voisinages $\mathcal{U}$ de 0 dans $\mathcal{M}_n(K)$ et $\mathcal{V}$ de I dans $GL_n(K)$ tels que
$\exp : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ est un difféomorphisme.

DEV

Appli 24 : Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = \exp(P(A))$.
DEV
En particulier, $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Coro 25 : $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \{A^2 / A \in GL_n(\mathbb{R})\}$ est surjective.

Rq 26 : l'exemple 13 montre que l'on n'a pas d'injectivité en général :
$$\exp(A) = I_n \not\Rightarrow A = 0$$

Expl/Appli 27 : $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ n'est pas l'exponentielle d'une matrice réelle.
!! A $\quad \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$ est-elle un carré ?

Appli 28 : Il existe $\mathcal{V}$ un voisinage de I dans $GL_n(K)$ tel que si G est un sous-groupe de $GL_n(K)$ inclus dans $\mathcal{V}$ alors $G = \{I\}$.

II - 2 - Inversion

Def 29 : Lorsque la série converge, on définit
$$\log(M) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(M-I)^k$$

Prop 30 : Soit $\|\cdot\|$ une norme sous-multiplicative,
Pour $M \in \mathcal{B}(I, 1[$, $\exp(\log(M)) = M$
Pour $M \in \mathcal{B}(0, \log 2[$, $\log(\exp(M)) = M$.

Prop 31 : Soit n_p l'ensemble des matrices nilpotentes d'ordre p
Soit $N_p = \{I + A \ / A \in n_p\}$.
$\exp : n_p \to N_p$ est un homéomorphisme dont l'inverse est le log.

Th 32 : $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme. DEV

Appli 33 : (de la prop 30) Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour t petit,
- $\exp(tX)\exp(tY) = \exp\left(t(X+Y) + \frac{t^2}{2}[X,Y] + O(t^3)\right)$
  où $[X,Y] = XY - YX$.
- $\exp(tX)\exp(tY)\exp(-tX)\exp(-tY) = \exp\left(t^2[X,Y] + O(t^3)\right)$.

A-t-on $O_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Im}\exp$? $\quad SO_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Im}\exp$?

III - Application aux équations différentielles.

Prop 34 : Soit $X \in \mathcal{M}_n(K)$, $\quad \frac{d}{dt}\left(e^{tX}\right) = Xe^{tX}$.

Prop 35 : La solution de $\frac{dX}{dt} = AX \quad ; \quad X(0) = X_0 \in \mathbb{R}^n$

est donnée par $X(t) = \exp(tA)X_0$.

Prop 36 : Soit $\gamma : \mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall s,t \in \mathbb{R}$,

$$\gamma(s+t) = \gamma(s)\gamma(t)$$

Alors γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et même analytique et

$$\gamma(t) = \exp(tA) \quad \text{avec } A = \gamma'(0).$$

Expl 37 : $\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} X \quad ; \quad X(0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \iff X(t) = \begin{bmatrix} x_0\cos t - y_0 \sin t \\ x_0 \sin t + y_0 \cos t \end{bmatrix}$

$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} X \quad ; \quad X(0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \iff X(t) = \begin{bmatrix} x_0 \operatorname{ch} t + y_0 \operatorname{sh} t \\ x_0 \operatorname{sh} t + y_0 \operatorname{ch} t \end{bmatrix}$.

Appl 38 : Classification des portraits de phase d'un système linéaire à coefficients constants, homogène, en dimension deux. (voir annexe)

Def 39 : Soit $\frac{dx}{dt} = v(x)$; $x(t_0) = x_0$ on note $\bar{x}$ un équilibre du système : $v(\bar{x}) = 0$.

i) $\bar{x}$ est dit stable si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $\forall x_0 \in B(\bar{x}, \eta)$, la solution maximale est définie au moins sur $[t_0, +\infty[$ et vérifie : $\forall t \in [t_0, +\infty[$, $\|x(t) - \bar{x}\| \leq \varepsilon$

ii) $\bar{x}$ est dit asymptotiquement stable si de plus $\exists \delta > 0$, $\forall x_0 \in \mathcal{B}(\bar{x}, \delta)$, $x(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} \bar{x}$

Th 40 : Soit $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle que $F(0) = 0$

. Si $Sp(DF(0)) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \,/\, \operatorname{Re} \lambda < 0\}$ alors 0 est un équilibre asymptotiquement stable de $\dot{X} = F(X)$

. Si l'une des valeurs propres de $DF(0)$ est à partie réelle strictement négative, alors 0 est instable.

Rq 41 : Si une valeur propre a pour partie réelle 0, on ne peut pas conclure.

Expl 42 : $\dot{X} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} X \quad , \quad X(0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$.

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

Ref : Moreira Testard

Moreira Mansuy

Faraut

Gourdon

$\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A \longmapsto A \exp A$ surj...

⊛ $\exists x$ tq $\varphi(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} =: J_n$

ΠQ si x

$$\begin{pmatrix} 0 & 2\pi \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}$$

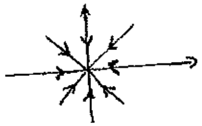
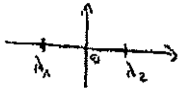
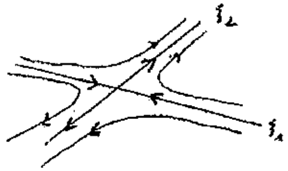
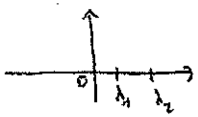
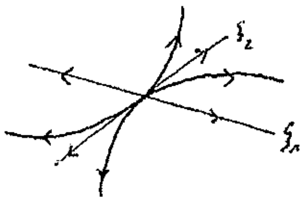
$AB = BA \Rightarrow \exp(A+B) = \exp A \exp B$.

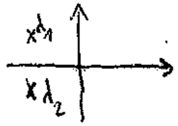
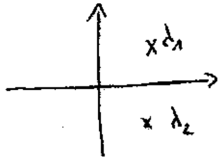
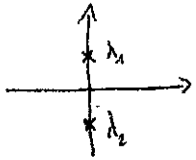
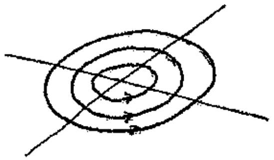
Réciproque ? [fausse...]

ΠQ $AB = BA$ ssi $\forall t$, $\exp tA$ et $\exp tB$ commutent.

$A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Système $\dot{x} = Ax$. On note $Sp(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$.

Matrice A / valeurs propres	Portrait de phase
$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ $\lambda < 0$	
$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ $\lambda > 0$	
	
	
	

Matrice A / Valeurs propres	Portrait de phase.
	
	
	

<u>Notation</u> : $\tilde{J}(\lambda)$ est diagonale par blocs

$$\begin{bmatrix} J_1(\lambda) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k(\lambda) \end{bmatrix} \quad \text{où } J_i(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}$$