155

Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

I] Endomorphismes diagonalisables

Soient $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

A]

Def 1 : Soient F un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $m \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E, $\mathcal{B}'=(u_1,\dots,u_m)$ une base de F et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
On définit la représentation matricielle de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ par $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) := \left(u_i^*(f(e_j))\right)_{\substack{i \in [\![1,m]\!] \\ j \in [\![1,n]\!]}}$ où $(u_1^*,\dots,u_m^*)$ désigne la base duale de $\mathcal{B}'$.
Si $F=E$ et $\mathcal{B}'=\mathcal{B}$ on note $Mat_{\mathcal{B}}(f) := Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.

Rq 2 :
$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ est bien définie car $f \in \mathcal{L}(E,F)$ est entièrement déterminée par son image dans une base.

Prop 3 : Soient $\mathcal{B},\mathcal{B}'$ deux bases de E et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Alors $Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id)^{-1} =: (P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1}$ et $Mat_{\mathcal{B}'}(f) = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} Mat_{\mathcal{B}}(f) (P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1}$
De ce fait, matriciellement, un changement de base correspond au fait que $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ et $Mat_{\mathcal{B}'}(f)$ sont semblables.

Def 4 :
- On appelle valeur propre de f un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $Ker(f-\lambda id) \neq \{0\}$, on note $Sp(f)$ l'ensemble des valeurs propres de f.
- On appelle espace propre associé à la valeur propre λ le s.e.v $E_\lambda(f) := Ker(f-\lambda id)$ de E. Tout élément de $E_\lambda(f)$ est appelé vecteur propre associé à λ.

Ces définitions sont aussi valables pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Def 5 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit $\chi_A(X) := \det(XI_n - A)$ le polynôme caractéristique de A.

Prop 6 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\forall P \in GL_n(\mathbb{K})$, $\chi_{P^{-1}AP} = \chi_A$.

Def 7 : On a donc $\forall \mathcal{B},\mathcal{B}'$ bases de E, $\chi_{Mat_{\mathcal{B}}(f)} = \chi_{Mat_{\mathcal{B}'}(f)} =: \chi_f$ que l'on appelle polynôme caractéristique de f.

Prop 8 : $\forall f \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in Sp(f) \iff \chi_f(\lambda) = 0$

Rq 9 : Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos alors $Sp(f) \neq \emptyset$.

Prop-def 10 : $I := \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(f) = 0\}$ est un idéal de l'anneau principal $\mathbb{K}[X]$. On appelle polynôme minimal de f, que l'on note Π_f, l'unique générateur unitaire de I.

Thm 11 (Cayley-Hamilton) : $\chi_f(f) = 0$ i.e $\Pi_f \mid \chi_f$.

B] Critères de diagonalisation et trigonalisation

Def 12 :
- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f est dit diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E composée de vecteurs propres de f.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Rq 13 : f diagonalisable $\iff$ $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ diagonalisable pour une base $\mathcal{B}$ de E quelconque.
En particulier, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = Diag(\underbrace{\lambda_1,\dots,\lambda_n}_{\in Sp(f)})$.

Def 14 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$). f (resp. A) est dit trigonalisable si il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire supérieure (resp. si A est semblable à une matrice triangulaire supérieure).

Ex 15 : $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ a pour matrice dans la base canonique $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Donc f est trigonalisable.

Prop 16 (caractérisation de la trigonalisabilité)
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f est trigonalisable ssi χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$.

Ex 17 : $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ a pour polynôme caractéristique $\chi_f = X^2+1$ qui est scindé sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$. Donc f n'est pas trigonalisable dans $\mathbb{R}$ mais f est trigonalisable dans $\mathbb{C}$.

Rq 18 : Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos alors χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et de ce fait f est trigonalisable.

Application 19 : L'ensemble des matrices complexes diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Thm 20 (lemme des noyaux)
Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P = P_1 \cdots P_k \in \mathbb{K}[X]$ avec $P_1,\dots,P_k$ premiers entre eux deux à deux.
Alors $Ker\, P(f) = \bigoplus_{i=1}^{k} Ker\, P_i(f)$

Thm 21 (Caractérisation de la diagonalisabilité)
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.
(i) f diagonalisable
(ii) χ_f scindé sur $\mathbb{K}$ et $\forall \lambda \in Sp(f)$, $\dim E_\lambda(f) =$ multiplicité de λ dans χ_f.
(iii) $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in Sp(f)$, $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$
(iv) π_f est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$.

Ex 22: $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ a pour polynôme caractéristique $\chi_f = (X-1)^2$. Si π_f était scindé à racines simples alors $\pi_f = X-1$. Impossible car $f \neq id$. Donc f n'est pas diagonalisable.

Corollaire 23: Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable et F un s.e.v. de E stable par f. Alors $f_{|F}$ est diagonalisable.

Application 24: (Critère de diagonalisabilité pour les corps finis)
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si $\mathbb{K}$ est un corps fini de cardinal q alors f est diagonalisable ssi $f^q - f = 0$.

II] Utilisation de la diagonalisation pour le calcul matricielle

Prop 25: Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1}$ et donc $\forall m \in \mathbb{N}$, $A^m = P \operatorname{diag}(\lambda_1^m, \dots, \lambda_n^m) P^{-1}$

Application 26: Calcul explicite des suites récurrentes matricielles d'ordre 1 de la forme $U_{n+1} = AU_n$ avec $A \in M_n(\mathbb{K})$.
En particulier, cela permet de calculer explicitement les suites récurrentes scalaires linéaire de la forme $u_{n+p} = a_{p-1} u_{n+p-1} + \dots + a_0 u_n$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, $a_0, \dots, a_{p-1} \in \mathbb{K}$.

Prop-def 27: (Série entière d'endomorphismes)
Soit $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ soit une série entière de rayon de convergence $R \in]0, +\infty]$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $|||f||| := \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| < R$.
Alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n f^n$ converge normalement et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n f^n \in \mathcal{L}(E)$.
De plus, $\begin{array}{ccc} \{f \in \mathcal{L}(E) \mid |||f||| < R\} & \to & \mathcal{L}(E) \\ f & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f^n \end{array}$ est continue.

Rq 28: Cela reste vrai si on remplace $f \in \mathcal{L}(E)$ par $A \in M_n(\mathbb{K})$

Prop 29: Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1}$ et donc $\exp(A) = P \operatorname{diag}(\exp(\lambda_1), \dots, \exp(\lambda_n)) P^{-1}$ où exp est définie par série entière pour $a_n = \frac{1}{n!}$.

Application 30: Résolution d'équation différentielles de la forme $X' = AX$ où $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, M_{p,n}(\mathbb{K}))$
En particulier, cela permet de résoudre les équations différentielles linéaire à coefficient constants de la forme $y^{(p)} + a_{p-1} y^{(p-1)} + \dots + a_0 y = 0$

Prop 31: (Calcul par polynôme interpolateur de Lagrange)
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in M_n(\mathbb{K})$) diagonalisable. Soit $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ développable en série entière. Soit L le polynôme interpolateur de Lagrange qui envoie λ sur $\varphi(\lambda)$ pour tout $\lambda \in Sp(f)$ (resp. $Sp(A)$)
Alors $L(f) = \varphi(f)$ (resp $L(A) = \varphi(A)$)

Rq 32: Cela permet un calcul plus rapide car cela ne demande pas de calculer la matrice de changement de base et son inverse.

Prop 33: (Codiagonalisation)
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisables tels que $f \circ g = g \circ f$.
Alors il existe une base commune de diagonalisation de f et g.

Thm 34: (Décomposition de Dunford) DEV 1
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_f soit scindé sur $\mathbb{K}$.
Alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $\begin{cases} d \text{ diagonalisable} \\ n \text{ nilpotent} \\ f = n + d \\ n \circ d = d \circ n \end{cases}$

Corollaire 35:
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que χ_A soit scindé sur $\mathbb{K}$.
Alors A diagonalisable ssi $\exp(A)$ diagonalisable

Ex 36: $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ vérifie $f = d + n$ où $d = id_{\mathbb{R}^2}$ diagonalisable et $n : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$ nilpotent et $d \circ n = n = n \circ d$.

Thm 37 (Réduction de Jordan)
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_f soit scindé sur $\mathbb{K}$. On pose $\chi_f = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$.
Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} J_{\alpha_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{\alpha_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}$

où $J_{\alpha_i}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & \varepsilon_{1,i} & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon_{\alpha_i - 1, i} \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix} \in M_{\alpha_i}(\mathbb{K})$ avec $\varepsilon_{1,i}, \dots, \varepsilon_{\alpha_i - 1, i} \in \{0, 1\}$

Prop 38 : Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Alors $\exp(f+g) = \exp(f) \circ \exp(g)$
$= \exp(g) \circ \exp(f)$

Application 39 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $f = d + n$ la décomposition de Dunford de f.
Alors $\exp(f) = \exp(d) \circ \exp(n) = \exp(n) \circ \exp(d)$.
Cela fournit une méthode efficace de calcul de l'exponentielle d'un endomorphisme (resp. d'une matrice) car $\exp(n)$ est une somme finie et $\exp(d)$ se calcule aisément grâce à la prop 31.

III] Diagonalisation en base orthonormée.

Def 40 :
- On appelle espace vectoriel euclidien un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie muni d'un produit scalaire (i.e une forme bilinéaire symétrique définie positive)
- On appelle espace vectoriel hermitien un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie muni d'un produit scalaire hermitien (i.e une forme sesquilinéaire symétrique définie positive)

Dans la suite, E désigne un espace euclidien ou hermitien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Def 41 : On appelle base orthonormée de E une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que
$\forall i \neq j \in [\![1,n]\!], \langle e_i, e_j \rangle = 0$ et $\forall i \in [\![1,n]\!], \langle e_i, e_i \rangle = 1$.

Prop 42 : $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une B.O.N de E ssi $\begin{cases} (e_1|\dots|e_n) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ si } E \text{ euclidien} \\ (e_1|\dots|e_n) \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C}) \text{ si } E \text{ hermitien} \end{cases}$

Prop-def 43 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique $f^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que
$\forall x, y \in E, \ \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$.

Rq 44 : Pour $\mathcal{B}$ une B.O.N de E, $Mat_{\mathcal{B}}(f^*) = {}^*Mat_{\mathcal{B}}(f) := {}^t\overline{Mat_{\mathcal{B}}(f)}$

Def 45 : $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit autoadjoint si $f^* = f$.

Rq 46 : Si E euclidien alors f est symétrique
Si E hermitien alors f est hermitien

Thm 47 : (Thm spectral)
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint. Alors il existe une B.O.N de vecteurs propres pour f.
De plus $Sp(f) \subset \mathbb{R}$.
Matriciellement on a : $\begin{cases} \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \ [{}^tM = M \Rightarrow \exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), {}^tPMP = D \text{ diagonale réelle}] \\ \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \ [{}^*M = M \Rightarrow \exists P \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C}), {}^*PMP = D \text{ diagonale réelle}] \end{cases}$

Application 48 :
Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne positive. Alors il existe une unique $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne positive telle que $H = R^2$.

C-ex 49 : Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est seulement symétrique alors le théorème est faux.
En effet, $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable car nilpotente non nulle.

Def 50 : $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit orthogonal (resp. unitaire) si $\forall x, y \in E, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$

Thm 51 : Si E est euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ est orthogonale. Alors il existe une B.O.N $\mathcal{B}$ de E pour laquelle il existe $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \in \{-1, 1\}$ et $\theta_1, \dots, \theta_s \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$
tels que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \varepsilon_r & & & \\ & & & R_{\theta_1} & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & R_{\theta_s} \end{pmatrix}$ où $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

Thm 52 : Si E est hermitien et $f \in \mathcal{L}(E)$ est unitaire. Alors il existe une B.O.N de E qui diagonalise f. De plus $Sp(f) \subset \mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

Def 53 :
Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal si $f \circ f^* = f^* \circ f$.

Thm 54 :
Si E est hermitien et $f \in \mathcal{L}(E)$ alors les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) f est normal
(ii) f est diagonalisable en base orthonormée
(iii) f et f^* sont codiagonalisables en base orthonormée

C-ex 55 : C'est faux si E est euclidien. En effet, pour $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
on a ${}^tAA = A{}^tA = I_2$ donc A est normal mais $\chi_A = X^2+1$ qui n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$ et de ce fait A n'est pas diagonalisable.

Pour $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on cherche à calculer $\exp(tA)$ pour $t \in \mathbb{R}^*$ par la méthode décrite en proposition 31.

$\chi_{tA} = X(X-t)(X+t)$ est scindé à racines simples donc tA diagonalisable

On cherche $L \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\begin{cases} L(-t) = e^{-t} \\ L(0) = 1 \\ L(t) = e^{t} \end{cases}$

Ce polynôme L est

$$L = e^{-t} \cdot \frac{X-t}{(-t)-t} \cdot \frac{X-0}{(-t)-0} + 1 \cdot \frac{X-t}{0-t} \cdot \frac{X-(-t)}{0-(-t)} + e^{t} \frac{X-(-t)}{t-(-t)} \times \frac{X-0}{t-0}$$

$$= \frac{e^{-t}}{2t^2} X(X-t) - \frac{X^2-t^2}{t^2} + \frac{e^{t}}{2t^2} X(X+t)$$

$$= X^2 \frac{ch(t)-1}{t^2} + X \frac{sh(t)}{t} + 1$$

Donc $\exp(tA) = L(tA) = A^2 \times (ch(t)-1) + A.sh(t) + I_2$

$$= (ch(t)-1)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + sh(t)\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ch(t)-1-sh(t)+1 & -2ch(t)+2+2sh(t) & 2ch(t)-2+sh(t) \\ 0 & 1 & 2ch(t)-2+2sh(t) \\ 0 & 0 & ch(t)-1+sh(t)+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-t} & 2(1-e^{-t}) & \frac{1}{2}(3e^{t}+e^{-t})-2 \\ 0 & 1 & 2(e^{t}-1) \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix}$$