154

Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Cadre : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

I - Sous-espaces stables, premières définitions

Définition 1 : Soit u dans $\mathcal{L}(E)$, et F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$.

Exemple 2 : Soit u endomorphisme de E, alors $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par u.
Pour λ dans $\mathbb{K}$, $\ker(u-\lambda Id)$ est stable par u. Si $\ker(u-\lambda Id)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, on le nomme sous-espace propre de u.

Définition 3 : Soit u dans $\mathcal{L}(E)$ et F sous-espace vectoriel (sev) de E stable par u. Alors u induit $u_F : F \to F$ un endomorphisme de F.

Remarque 4 : Si $\mathcal{E}$ est une base de E obtenue en complétant une base de F, sev stable par $u \in \mathcal{L}(E)$, alors :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{E}} u = \begin{pmatrix} A & B \\ (0) & C \end{pmatrix} \text{ avec } A \in \mathcal{M}_{\dim F}(\mathbb{K}),\ B \in \mathcal{M}_{\dim F, n-\dim F}(\mathbb{K}) \text{ et } C \in \mathcal{M}_{n-\dim F}(\mathbb{K}).$$

Proposition 5 : Soit u dans $\mathcal{L}(E)$, on a les résultats suivants :
* $(\operatorname{Im}(u^k))_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante stationnaire.
* $(\ker(u^k))_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante stationnaire.

Notons n_0 le rang à partir duquel les deux suites stationnent, on a alors :
* $\operatorname{Im}(u^{n_0})$ et $\ker(u^{n_0})$ stables par u.
* $E = \operatorname{Im}(u^{n_0}) \oplus \ker(u^{n_0})$
* $u_{|\ker u^{n_0}}$ est nilpotent et $u_{\operatorname{Im}(u^{n_0})}$ est un automorphisme.

Remarque 6 : La donnée $(\ker(u^{n_0}), \operatorname{Im}(u^{n_0}), u_{\ker u^{n_0}}, u_{\operatorname{Im} u^{n_0}})$ est appelé décomposition de Fitting de u.

Définition 7 : On note $\chi_u = \det(X Id - u)$ le polynôme caractéristique de u et π_u le polynôme minimal de u (unique générateur unitaire de l'idéal des polynômes annulateurs de u).

Proposition 8 : Soit F sev stable par $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\chi_{u_F} \mid \chi_u$ et $\pi_{u_F} \mid \pi_u$.

Proposition 9 : Soit $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$ une décomposition de E en somme directe de sev stables par u. Alors $\chi_u = \chi_{u_{E_1}} \times \cdots \times \chi_{u_{E_p}}$ et $\pi_u = \operatorname{ppcm}(\pi_{u_{E_1}}, \ldots, \pi_{u_{E_p}})$.

Proposition 10 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, χ_u est irréductible si et seulement si u n'admet pas de sev stable non trivial.

Proposition 11 : Si $\mathbb{K}$ est infini, π_u de degré $\dim E$ si et seulement si u admet un nombre fini de sous espaces vectoriels stables.

Définition 12 : Soit F sev de E et E^* le dual algébrique de E. Alors $F^\perp := \{\varphi \in E^* \mid \forall x \in F, \varphi(x) = 0\}$ est un sev de E^*.

Proposition 13 : Pour F sev de E, $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$.

Définition 14 : Soit u dans $\mathcal{L}(E)$, l'endomorphisme de E^* suivant : ${}^t u : \varphi \mapsto \varphi \circ u$ est appelé transposé de u.

Proposition 15 : Le sev F de E est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par ${}^t u$.

Remarque 16 : En particulier, trouver un vecteur propre de ${}^t u$ permet d'obtenir un hyperplan de E stable par u, et potentiellement donc effectuer des raisonnements par récurrence.

II - Sous-espaces stables et réduction des endomorphismes

Théorème 17 : Lemme des noyaux
Soient $P_1, \ldots, P_k$ des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux. Alors pour tout u dans $\mathcal{L}(E)$: $\ker\left[\left(\prod_{i=1}^{k} P_i\right)(u)\right] = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker(P_i(u))$.

Définition 18 : On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.

Théorème 19 : Soient u dans $\mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de u. On note $E_{\lambda_i} := \ker(u - \lambda_i Id)$ le sous-espace propre de u associé à chaque valeur propre. On a alors diagonalisable si et seulement si $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$, si et seulement si $n = \sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i}$

Théorème 20 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et la dimension de E_{λ_i} est égale à la multiplicité de λ_i comme racine de χ_u.

Proposition 21 : Soit F stable par $u \in \mathcal{L}(E)$, diagonalisable, alors u_F est diagonalisable.

inverser l'ordre pour donner l'idée géométrique d'abord

Définition 22 : On dit que u est trigonalisable si et seulement si il existe $\mathcal{B}$ base de E telle que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire.

Remarque 23 : Cette propriété est équivalente à l'existence d'un drapeau $E_0=\{0\}\subset E_1 \subset \dots \subset E_n = E$ tel que $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $\dim E_i = i$ et E_i est stable par u.

Théorème 24 : Soit $u\in\mathcal{L}(E)$, u est trigonalisable ssi χ_u est scindé.

Proposition 25 : Soit F sev stable par $u\in\mathcal{L}(E)$ trigonalisable, alors u_F est trigonalisable.

Lemme 26 : Soit $u\in\mathcal{L}(E)$, P annulateur de u. On note $P=\beta\prod_{i=1}^{p}P_i^{\alpha_i}$ la décomposition en irréductibles de P. Alors $E=\bigoplus \ker(P_i^{\alpha_i}(u))$ et pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, la projection sur $\ker(P_i^{\alpha_i}(u))$ parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i}\ker(P_j^{\alpha_j}(u))$ est un polynôme en u.

Théorème 27 : Décomposition de Dunford

Soit u dans $\mathcal{L}(E)$, si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$, alors il existe d diagonalisable et n nilpotente telles que $u=d+n$, et d commute avec n.

Exemple 28 : Soit $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$ alors $D=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $N=\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ donnent la décomposition matricielle de Dunford de A.

Application 29 : Cette décomposition permet de calculer rapidement des puissances de matrices et des exponentielles de matrices.

Théorème 30 : Réduction de Jordan

Soit $u\in\mathcal{L}(E)$, tel que χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$. $\chi_u=\prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)^{n_i}$

Alors il existe $\mathcal{B}$ une base de E telle que
$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u = \begin{pmatrix}A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_p\end{pmatrix}$ avec $\forall i\in[\![1,p]\!]$, $A_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & \varepsilon_1 & & (0)\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon_{n_i-1}\\ (0) & & & \lambda_i\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{K})$ et $\varepsilon_j\in\{0,1\}$.

Les A_i sont appelées blocs de Jordans, et le sev engendré par les vecteurs de $\mathcal{B}$ entre les positions $\sum_{j=1}^{i-1}n_j+1$ et $\sum_{j=1}^{i}n_j$ est stable par u.

Exemple 31 : Soit $A=\begin{pmatrix}-1&-1&0&0\\0&-1&0&0\\0&2&0&-1\\0&-2&2&3\end{pmatrix}$ alors $J=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$ est la réduite de Jordan de A.

Théorème 32 : Soient u et v diagonalisables et qui commutent (resp. trigonalisables). Alors il existe une base commune de diagonalisation (resp. trigonalisation).

Corollaire 33 : Soit $(u_i)_{i\in I}$ famille d'endomorphismes diagonalisables (resp. trigonalisables) commutant deux à deux, alors il existe une base commune de diagonalisation (resp trigonalisation).

Définition 34 : On dit que $U\subset\mathcal{L}(E)$ est irréductible si les deux sev stables par tout endomorphisme de U sont $\{0\}$ et E.

Lemme 35 : Lemme de Schur

Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie (ou $\mathbb{R}$-ev de dimension impaire)
Alors les seuls éléments commutant avec U irréductible dans $\mathcal{L}(E)$ sont les homotéties.

III - Endomorphismes remarquables

Définition 36 : Soit $P := -\sum_{i=0}^{n-1}a_iX^i+X^n$, alors $C_P=\begin{pmatrix}0 & & a_0\\ 1 & \ddots 0 & \vdots\\ (0) & 1 & a_{n-1}\end{pmatrix}$ est appelé matrice compagnon de P. On a $\chi_{C_P}=P$.

Définition 37 : Soit $u\in\mathcal{L}(E)$. On dit que u est cyclique s'il existe x dans E tel que $(x,u(x),\dots,u^{n-1}(x))$ forme une base de E.

Proposition 38 : Soit u dans $\mathcal{L}(E)$, on a équivalence entre
* u est cyclique
* $\pi_u=\chi_u$
* π_u de degré n
* Il existe une base dans laquelle la matrice de u est C_{χ_u}
* $\dim(\mathbb{K}[u])=n$

Proposition 39 : Soit u cyclique, alors ses seuls sev stables sont ~~Im u~~ Im $P(u)$ et ~~ker u~~ ker $P(u)$ pour P polynôme. (*)

Théorème 40 : Réduction de Frobenius — DEV 1

Soit u dans $\mathcal{L}(E)$. Il existe $\mathcal{B}$ base de E et une suite de polynômes unitaires $P_r|P_{r-1}|\dots|P_1$ telle que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ soit diagonale par blocs, ces blocs étant les matrices compagnons des P_i.

Exemple 41 : Si u est cyclique, il admet un unique invariant de similitude (nom donné au polynômes dans la réduction de Frobenius) égal à χ_u.
Si u est nilpotent de blocs de Jordan de tailles $m_1,\dots,m_r$, alors ces invariants de similitude sont $(X^{m_1},\dots,X^{m_r})$

(*) on peut ajouter quelques items pour introduire la notion de polynôme minimal ponctuel et le résultat : soit $x\in E$ tq $\mu_x=\mu$, $\mathrm{Vect}(x,u(x),\dots,u^{\deg\mu_u}(x))$ est u stable et admet un supp u-stable

Définition 42 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est semi-simple si pour tout sev de E stable par u, il existe un supplémentaire à F stable par u.

Proposition 43 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, π_u irréductible implique u semi-simple

Théorème 44 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, u est semi-simple ssi π_u est sans facteurs carrés.

Remarque 45 : Si $\mathbb{K}$ est algebriquement clos, semi-simple est équivalent à diagonalisable.

Définition 46 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E euclidien. Alors il existe u^* endomorphisme de E tel que pour tout x et y dans E, $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$, on l'appelle adjoint de u.

Définition 47 : Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit auto-adjoint si $u^* = u$.

Proposition 48 : Si u est auto-adjoint, si F est stable par u alors $F^\perp$ (au sens euclidien) est stable par u.

Théorème 49 : Soit u auto-adjoint, alors u est diagonalisable et ses ~~sous~~-espaces propres sont orthogonaux deux à deux.

Corollaire 50 : Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors il existe une base orthonormée dans laquelle diagonale.

Définition 51 : Soit u dans $\mathcal{L}(E)$, E euclidien, alors u est orthogonal si $\forall x, y \in E$, $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$

Proposition 52 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on a équivalence entre

* u orthogonal
* $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$
* Soit B base orthonormée de E, $A = \underset{B}{\mathrm{Mat}}(u)$, alors ${}^tAA = A^tA = I_n$

Proposition 53 : Soit u orthogonal, E euclidien. On a les propriétés suivants :

* u transforme une base orthonormée en base orthonormée
* si F est un sev stable par u, alors l'orthogonal de F est stable par u.

IV - Représentations

Définition 54 : Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et G un groupe fini. Une représentation linéaire de G dans V est un homéomorphisme de G dans $GL(V)$. Dans la suite, V est de dimension fine n.

Définition 55 : Soit (ρ, V) une représentation de G. Une sous représentation est un sev W de V tel que pour tout g dans G, W est stable par $\rho(g)$.

Définition 56 : Une représentation est irréductible si ses seules sous-représentations sont $\{0\}$ et elle-même.

Théorème 57 : Soit (ρ, V) représentation linéaire de G, et W stable par G ($\rho(g) \subset W$, $\forall g \in G$), alors il existe W° un supplémentaire de W stable par G.

Théorème 58 : Toute représentation est somme directe de représentations irréductibles

DEV 2
