154 Sous-esp stables par un endo ou une famille d'endo d'un e.v de dimension finie. App.

Sauf mention du contraire on prends E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$

I - Sous-espaces stables.

1 - Définition et premiers exemples.

Définition 1 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (endomorphisme de E), soit F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$.
Exemples 2 :

- Le noyau et l'image d'un endomorphisme sont stables par celui-ci.
- Les sous-espaces propres de $u \in \mathcal{L}(E)$ sont stables par u.
- L'image et le noyau d'un polynôme d'endomorphisme $P(u)$ sont stables par u.

2 - Endomorphismes induits

Définition 3 : Si F est un sous-espace vectoriel stable par $u \in \mathcal{L}(E)$ alors l'endomorphisme induit par u sur F est : $u : F \longrightarrow F$.
Proposition 4 : Soit F un sous-espace vectoriel de E, alors F stable par u si et seulement si pour toute base B_F de F complétée en une base B de E, on a alors la matrice de u dans la base B est de la forme : $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_{\dim(F)}(\mathbb{K})$,$B \in \mathcal{M}_{\dim(F),n-\dim(F)}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-\dim(F)}(\mathbb{K})$.
Proposition 5 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on note π_u son polynôme minimal et χ_u son polynôme caractéristique. Alors $\pi_{u_F}|\pi_u$ et $\chi_{u_F}|\chi_u$.
Corollaire 6 : Si χ_u est irréductible, les seuls sous-espaces de E stables par u sont E et 0.
Proposition 7 : Si u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-ev (espace vectoriel) E de dimension finie, alors il existe un sev (sous-espace vectoriel) F de E de dimension 1 ou 2 stable par u.

3 - Dualité

Définition 8 : Si A est un sous-espace de E et $E^\star$ est le dual de E on note $A^\perp = \{\varphi \in E^\star / \forall x \in A, \varphi(x) = 0\}$ qui est un sev de $E^\star$.
Proposition 9 : Si F est un sev de E, alors $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$.
Définition 10 : Soit $u \in E^*$, on note $\begin{array}{rccc} {}^t u : & E^\star & \longrightarrow & E^\star \\ & \varphi & \longmapsto & \varphi \circ u \end{array}$.
Proposition 11 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Un sev F de E est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par ${}^t u$.

II - Traduction à la réduction des endomorphismes.

1 - Diagonalisation.

Théorème 12 : (Lemme des noyaux) Soit u un endomorphisme de E. Si $P_1, \dots, P_n \in K[X]$ (avec n entier strictement positif) sont premiers entre eux deux à deux, alors les sous-espaces vectoriels $V_i = \ker(P_i(u))$(où $1 \leq i \leq n$) sont en somme directe et

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \ker\left[P_i(u)\right] = \ker\left[\left(\prod_{i=1}^{n} P_i\right)(u)\right].$$

Définition 13 : Soit u un endomorphisme de E et $P \in K[X]$ un polynôme annulateur de u et $\prod_{i=1}^{n} P_i^{m_i}$ la factorisation de P avec les polynômes P_i irréductibles et distincts. Alors il existe une base B de E et des matrices $A_i \in \mathbf{M}_{n_i}(K)$ telles que la matrice de u dans la base B est diagonale par blocs formées par les matrices A_i. On dit alors que u est diagonalisable par blocs.
Définition 14 : On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.
Proposition 15 : On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable s'il existe une base $(e_i)_{i \in I}$ telle que la matrice de u dans la base $(e_i)_{i \in I}$ est diagonale.
Théorème 16 : Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, ..., \lambda_p$ des valeurs propres de u.

Alors : u est diagonalisable si et seulement si $E = \oplus_1^p E_{\lambda_i}$ si et seulement si $\dim(E) = \sum_1^p \dim(E_{\lambda_i})$.
Corollaire 17 : Si $u \in \mathcal{L}(E)$ admet n valeurs propres deux à deux distinctes, alors u est diagonalisable.
Proposition 18 : Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et λ valeur propre de u d'ordre m alors $\dim(E_\lambda) \leqslant m$.
Définition 19 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et soit λ une de ses valeurs propres, on pose E_λ son sous-espace propre associé.
Théorème 20 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, u est diagonalisable si et seulement si : $\chi_u(X)$ est scindé dans $\mathbb{K}$ et pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \dim(E_{\lambda_i}) = m_i$.
Proposition 21 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, si χ_u son polynôme caractéristique scindé avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ses valeurs propres et $m_1, \ldots, m_p$ les multiplicités associé à chacune des valeurs propres. Alors u est diagonalisable et $Q(X) = \prod_1^p (X - \lambda_i)$ est un polynôme annulateur de u.
Théorème 22 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, alors u est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme annulateur de u, scindé et n'ayant que des racines simples si et seulement si son polynôme minimal est scindé et à racines simples.

2 - Trigonalisation.
Définition 23 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, u est trigonalisable s'il existe une base $(e_i)_{i \in I}$ telle que le matrice de u dans cette base est triangulaire supérieure.
Théorème 24 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, u est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.
Corollaire 25 : Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Corollaire 26 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si $Spec(A) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$, alors $Tr(A) \sum_1^p \lambda_i$ et $\det(A) = \prod_1^p \lambda_i$.
Défiition 27 : Un drapeau de E est une suite finie strictement croissante de sous-espaces vectoriels de E, commençant par l'espace nul $\{0\}$ et se terminant par l'espace total E : $\{0\} = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_{k-1} \subsetneq E_k = E$. avec k un entier naturel. De plus si $\dim(E_i) = i$ pour tout $0 \leq i \leq k \leq n$ alors le drapeau est dit total.
Proposition 28 : Soit u un endomorphisme de E, alors u est trigonalisable si et seulement s'il existe un drapeau total de E stable par u.

3 - Réductions simultanées.
Théorème 29 : Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisables (respectivement trigonalisables) et tels que $u \circ v = v \circ u$. Alors il existe une base commune de diagonalisation (respectivement de trigonalisation) de u et v. On dit alors que u et v sont codiagonalisables (respectivement cotrigonalisables).
Corollaire 30 : Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes de E diagonalisables (respectivement trigonalisables) et commutant deux à deux. Alors il existe une base commune de diagonalisation (respectivement trigonalisation) à tous les u_i.
Définition 31 : On dit que $U \subset \mathcal{L}(E)$ est irréductible si les deux seuls sous-espaces de E stables par tout élément de U sont E et $\{0\}$.
Application 32 : (Lemme de Schur). Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie. Soit U une partie irréductible de $\mathcal{L}(E)$, alors les seuls éléments commutant avec tout les éléments de U sont les homothéties.
Remarque 33 : Si E est un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie le résultat précédent reste vrai si n impair.

4 - Décomposition de Dunford.
Théorème 34 : (Théorème des polynômes annulateurs) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur. Soit $P = \alpha \prod_1^p M_i^{m_i}$ la décomposition en facteurs irréductibles de $\mathbb{K}[X]$ du polynôme P. On pose pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, $N_i = \ker M_i^{m_i}(u)$. On a alors $E = \oplus_1^p N_i$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ la projection sur N_i parallèlement à $\oplus_{j=1, j \neq i}^p N_j$ est un poynôme en u.
Théorème 35 : (Décomposition de Dunford) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que son polynôme caractéristique χ_u soit scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes tel que :

- d est diagonalisable, n est nilpotent.
- $u = d + n$ et $d \circ n = n \circ d$.

De plus d et n sont des polynômes en u.
Proposition 36 : Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que son polynôme minimal π_A soit scindé et $A = D + N$, la décomposition de Dunford dans $\mathbb{C}$ de A. On considère l'application $\varphi_A : M \longrightarrow AM - MA$. Alors :

- $\varphi_A = \varphi_D + \varphi_N$ est la décomposition de Dunford de φ_A.
- A diagonalisable $\Leftrightarrow \varphi_A$ diagonalisable.

III - Endomorphismes remarquables.

1 - Endomorphismes cycliques.
Définition 37 : Soit $P(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \ldots - a_0 \in \mathbb{K}[X]$ un

polynôme unitaire. On lui associe sa matrice compagnon définie par :

$$C_p = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \quad C_p \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Proposition 38 : Avec la définition précédente on a alors $\chi_{C_p} = P$.
Définition 39 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E.
Proposition 40 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :

- u est cyclique.
- $\pi_u = (-1)^n \chi_u$.
- π_u de degré n.
- Il existe une base de E dans laquelle la matrice de E est égale à la matrice C_p.
- $\dim(\mathbb{K}[u]) = n$.

Proposition 41 : Soit u un endomorphisme cyclique, les seuls sous-espaces stables par u sont son noyau et son image.
Théorème 42 : (Réduction de Frobenius) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe une base B de E et une suite unique de polynômes unitaires $P_r|P_{r-1}|\dots|P_1$ tels que la matrice de u dans la base B est diagonale par blocs, ces blocs étant les matrices compagnons associées à chacun des polynômes.

2 - Endomorphismes semi-simples.
Définition 43 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on dit que u est semi-simple si pour tout sous-espaces F de E stable par u, il existe un supplémentaire de F stable par u.
Proposition 44 : Soit u un endomorphisme π_u est irréductible alors u est semi-simples.
Théorème 45 : $u \in \mathcal{L}(E)$ est semi-simple si et seulement s'il n'y a pas de facteurs carrés dans π_u.
Remarque 46 : Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, semi-simple est équivalent à diagonalisable.

3 - Endomorphismes auto-adjoints.
Définition 47 : Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E de dimension finie, on appelle adjoint de u l'endomorphisme noté $u^\star$ tel que $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u^\star(y)\rangle$
Définition 48 : Un endomorphisme u d'un espace euclidien est dit auto-adjoint si $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$ (cad : $u^\star = u$).
Proposition 49 : Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme auto-adjoint. Si F est un sev de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u.
Théorème 50 : Soit u un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien E, alors u est diagonalisable et les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux.
Corollaire 51 : Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. Il existe une base orthonormée dans laquelle S est diagonalisable.
Proposition 52 : Soit E un espace hermitien et u un endomorphisme auto-adjoint. Si F est un sev de E stable par u alors $F^\perp$ est stable par $u^\star$.

4 - Endomorphismes normaux.
Définition 53 : Un endomorphisme u d'un espace hermitien e est dit normal si $u^\star \circ u = u \circ u^\star$.
Théorème 54 : Soit u un endomorphisme normal d'un espace hermitien E, alors u est diagonalisable et les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux.
Corollaire 55 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ normale. Il existe une matrice unitaire U telle que $A' = {}^t\overline{U}AU$ soit diagonale.

5 - Endomorphismes orthogonaux.
Définition 56 : $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit endomorphisme orthogonal si $\forall (x,y) \in E^2, < u(x), u(y) >=< x, y >$.
Proposition 57 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on équivalence entre les propositions suivantes :

- u orthogonal.
- $\forall x \in E, \| u(x) \| = \| x \|$.
- Soit B base orthonormée de E et $A = \mathcal{M}at_B(u)$, alors ${}^tAA = A\,{}^tA = I_n$.

Proposition 58 : Soit $u \in O(E)$, alors les valeurs propres de u sont ± 1 et $\det(u) = \pm 1$, en particulier, u est bijective.
Proposition 59 : u est un endomorphisme orthogonal si et seulement s'il transforme toute base orthonormée en une base orthonormée.
Proposition 60 : Soit E un espace euclidien ou hermitien et $u \in \mathcal{L}(E)$ orthogonal. Si F est un sev de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u.

Références :
Gourdon Algèbre
Beck-Malik-Payré Objectif Agrégagtion
Grifone Algèbre linéaire