154 Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un e.v de dimension finie. Applications.

Berhuy FGN 1 Mansuy

Cadre : $\mathbb{K}$ est un corps, E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n. F est un sous-espace de dimension r de E, $u \in \mathcal{L}(E)$.

I] Sous-espace stable par un endomorphisme

1. Définitions (O.A)

Déf. 1 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$.

Ex. 2 : $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont des sous-espaces stables par u.

Prop. 3 : Soit F un sous-espace stable par $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Alors F est stable par $u+v$ et $u \circ v$.

Prop. 4 : Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ laisse stables tous les sous-espaces de dimension k de E, alors u est une homothétie.

Prop. 5 : Si F est stable par u, alors $P(u_{|F}) = P(u)_{|F}$, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$.

Ex. 6 : Si $P \in \mathbb{K}[X]$, alors $\ker(P(u))$ est un sev de E stable par u.

Prop. 7 : Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors u admet au moins une droite ou un plan stable.

2. Endomorphismes induits (O.A)

Prop. 8 : Soit F un sev de E stable par u. Alors il existe deux endomorphismes : $u_{|F} \in \mathcal{L}(F)$, la restriction de u à F, et $\bar{u} \in \mathcal{L}(E/F)$ obtenu par passage au quotient.

Prop. 9 : Soit F stable par u. Soit $\mathcal{B}$ une base de E dont les r premiers vecteurs forment une base de F, $\mathcal{B}_F$, et soit $\mathcal{B}'$ le complémentaire de $\mathcal{B}_F$ dans $\mathcal{B}$. Alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right).$$

$\pi(\mathcal{B}')$ est une base de E/F, notée $\mathcal{B}_{E/F}$. Alors :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u_{|F}) \quad \text{et} \quad B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{E/F}}(\bar{u}).$$

Prop. 10 : Réciproquement, si pour $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E,

$$T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

avec $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$, alors $F = \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_r)$ est stable par u. De plus, si $C = 0$, alors $G = \mathrm{vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$ est stable par u.

Rem. 11 : On obtient dans le dernier cas une décomposition de E $E = F \oplus G$ en deux sous-espaces supplémentaires stables.

Cor. 12 : Sous les conditions de la prop. 9, on a $\chi_u = \chi_{u_{|F}} \cdot \chi_{\bar{u}}$ (où χ_u désigne le polynôme caractéristique de u).

Application directe aux endomorphismes nilpotents

Déf. 13 : u est nilpotent s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $u^m = 0$. On a de plus $\chi_u = (-1)^n X^n$, où $n = \dim E$. On appelle m l'indice de nilpotence.

Prop. 14 : u est nilpotent $\Leftrightarrow$ $u_{|F}$ et $\bar{u}$ sont nilpotents.

Prop. 15 : Soit u nilpotent d'indice n. L'ensemble de sous-espaces stables par u sont les $\ker(u^k)$, $k \in [\![0, n]\!]$.

FGN 2

Prop. 16 : Soit u nilpotent, soit S un sev stable par u tel que $E = \mathrm{Im}(u) + S$. Alors $S = E$.

3. Dualité et sous-espaces stables (O.A, Gourdon)

Déf. 17 : L'orthogonal de $F \subset E$ est : $F^\perp = \{u \in E^* / \forall x \in F, u(x) = 0\}$.

Prop. 18 : F est stable par u $\Leftrightarrow$ $F^\perp$ est stable par ${}^t u$.

Rem. 19 : Si E est muni d'un produit scalaire, on a le même résultat avec u^*.

Ex. 20 : Si $x \in E^*$ est un vecteur propre de ${}^t u$, alors $\mathbb{K}x$ est stable par ${}^t u$, donc $(\mathbb{K}x)^\circ$, hyperplan de E, est stable par u.

II] Réduction (O.A, Berhuy, Gourdon)

1. Polynômes d'endomorphismes

Notation : On notera χ_u le polynôme caractéristique de u et π_u son polynôme minimal.

Prop. 21 : Soit $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_s$ une décomposition en somme directe

FGN2

de sous-espaces stables par u. Alors on a $\chi_u = \chi_{u|E_1}\cdots\chi_{u|E_s}$ et $\pi_u = \mathrm{ppcm}(\pi_{u|E_1},\dots,\pi_{u|E_s})$.

Prop.22 : Soit F un sev stable strict par u. On a $\chi_{u|F} \mid \chi_u$ et $\pi_{u|F} \mid \pi_u$.

Prop.23 : χ_u est irréductible $\Leftrightarrow$ u n'admet pas de sev stable non trivial.

Prop.24 : π_u est de degré n $\Leftrightarrow$ l'ensemble des sev stables par u est fini.

Th.25 : (de décomposition des noyaux.) Soit $P = P_1\dots P_s$, où $P_i \in \mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux deux à deux. Alors pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$:

$$\ker(P(u)) = \ker(P_1(u)) \oplus \dots \oplus \ker(P_s(u)).$$

App.26 : Soit F un sev stable par u. Alors, avec les mêmes notations, si P est un polynôme annulateur de u :

$$F = \bigoplus_{i=1}^{s} F \cap (\ker(P_i(u))).$$

2. Sous-espaces associés à un endomorphisme

Déf.27 : Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u, on appelle sous-espace propre associé à λ le sev $E_\lambda = \ker(u - \lambda Id_E)$.

Prop.28 : Les sous-espaces propres de u sont stables par u.

Ex.29 : Si $\mathrm{Mat}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors les droites engendrées resp. par $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont stable par u.

App.30 : Pour tout $\lambda \in sp(u)$, si $m_\lambda =$ multiplicité de λ, on a $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$.

Prop.31 : Les sous-espaces propres de u sont en somme directe.

Déf.32 : Supposons χ_u scindé sur $\mathbb{K}$, $\chi_u = (-1)^n (X-\lambda_1)^{n_1}\dots(X-\lambda_s)^{n_s}$. Alors pour tout i, on appelle sous-espace caractéristique de u associé à la valeur propre λ_i le sev $N_i = \ker((u - \lambda_i Id_E)^{n_i})$.

Prop.33 : Les sous-espaces caractéristiques sont stables par u.

Prop.34 : • On a $E = N_1 \oplus \dots \oplus N_s$.
• $\forall i$, $\dim(N_i) = n_i$.

3. Diagonalisation, trigonalisation

Déf.35 : On dit que u est diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Rem.36 : Il est équivalent de dire que :
• Il existe une base de E formée des vecteurs propres de u.
• E se décompose en somme directe de droites stables par u.

Th.37 : Il y a équivalence entre :
(i) u est diagonalisable ;
(ii) $E = \bigoplus_{\lambda \in sp(u)} E_\lambda$;
(iii) χ_u est scindé et $\forall \lambda \in sp(u)$, on a $\dim(E_\lambda) = m_\lambda$.

Ex.38 : Dans l'ex.29, u est diagonalisable : $sp(u) = \{0,1,2\}$ et $\forall \lambda \in sp(u)$, $\dim(E_\lambda) = 1$.

Prop.39 : Soit F stable par u. Si u est diagonalisable, $u_{|F}$ l'est aussi. En particulier, si $\lambda \in sp(u)$, $u_{|E_\lambda}$ est diagonalisable.

Déf.40 : On dit que u est trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire (supérieure).

Rem.41 : Il est équivalent de dire qu'il existe un drapeau complet de E formé de sev stables par u, ie des sous-espaces $\{0\} = E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_n = E$ stables par u, tels que $\dim(E_i) = i$ $\forall i \in \{0,\dots,n\}$.

Th.42 : u est trigonalisable $\Leftrightarrow$ χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$.

Ex.43 : Si $\mathrm{Mat}(u) = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$, alors $\chi_u = (T+1)(T-5)^2$ et u est trigonalisable.

Prop.44 : Soit F stable par u. Si u est trigonalisable, $u_{|F}$ l'est aussi.

DEV ①

Lemme 45 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soit $F \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de u. On note $F = \beta M_1^{\alpha_1}\dots M_s^{\alpha_s}$ sa décomposition en éléments irréductibles. $\forall i$, on note $N_i = \ker(M_i^{\alpha_i}(u))$. Alors $E = N_1 \oplus \dots \oplus N_s$ et, $\forall i$, la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$ est un polynôme en u.

Th.46 : (Décomposition de Dunford.) Supposons χ_u scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple $(d,n) \in (\mathcal{L}(E))^2$ tel que $u = d+n$, avec
(i) d diagonalisable et n nilpotente ;
(ii) $dn = nd$.

Gourdon

Ex.47 : Si $Mat(u) = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, alors $Mat(d) = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $Mat(n) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

App.48 : On utilise la décomposition de Dunford pour le calcul d'exponentielles ou de puissances de matrices.

Th.49 : (Réduction de Jordan.) Supposons χ_u scindé sur $\mathbb{K}$, $\chi_u = (-1)^n \prod_{i=1}^{s} (X-\lambda_i)^{n_i}$. Alors il existe une base B de E dans laquelle $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_s \end{pmatrix}$, où $\forall i$, $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & \varepsilon_{i,1} & & \\ & \lambda_i & \varepsilon_{i,2} & \\ & & \ddots & \varepsilon_{i,n_i-1} \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} \in M_{n_i}(\mathbb{K})$ avec $\varepsilon_{i,j} \in \{0,1\}$.

3. Endomorphismes semi-simples

Déf.50 : u est semi-simple si pour tout sev F de stable par u, il existe un supplémentaire de F stable par u.

Th.51 : u est semi-simple $\Leftrightarrow$ π_u est produit de polynômes irréductibles unitaires distincts deux à deux.

FGN2

Rem.52 : u est semi-simple et χ_u est scindé $\Leftrightarrow$ u est diagonalisable.

App.53 : Soit u nilpotent et semi-simple. Alors u est l'endomorphisme nul.

Prop.54 : Si u est semi-simple, alors $u_{|F}$ et $\bar{u}$ le sont aussi.

III] Réduction de Frobenius (Gourdon, Berhuy)

1. Endomorphismes cycliques

Déf.56 : Si $x \in E$, le sev stable engendré par x est le plus petit sev de E stable par u contenant x. On le note E_x.

Prop.57 : Une base de E_x est donnée par $(x, u(x), \dots, u^{d-1}(x))$ avec d le plus petit entier tel que $(x, u(x), \dots, u^d(x))$ soit liée.

Déf.58 : u est cyclique s'il existe x tel que $(x, u(x), \dots, u^{d-1}(x))$ soit une base de E.

Prop.59 : u est cyclique $\Leftrightarrow$ $\exists B$ base de E tq $Mat_B(u)$ est une matrice compagnon ;
$\Leftrightarrow$ $\exists x \in E \setminus \{0\}$ tq $E = E_x$;
$\Leftrightarrow$ $\deg(\pi_u) = n$, ie $\pi_u = \chi_u$.
$\Leftrightarrow$ les sous-espaces propres de u sont de dimension 1.

2. Invariants de similitude

Th.60 : Il existe $F_1, F_2, \dots, F_s$ une suite de sev stables par u tels que :
(i) $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_s$ (ii) $\forall i$, $u_{|F_i}$ est cyclique (iii) $\forall i$, $\pi_{u_{|F_{i+1}}} \mid \pi_{u_{|F_i}}$.
La suite $\pi_1 \dots \pi_s$ ne dépend que de u et est appelée suite des invariants de similitude de u.

Th.61 : (Réduction de Frobenius.) Si $\pi_1, \dots, \pi_s$ est la suite des invariants de similitude de u, il existe une base B de E telle que

$Mat_B(u) = \begin{pmatrix} C_{\pi_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_{\pi_s} \end{pmatrix}$, où C_{π_i} est la matrice compagnon de π_i.

De plus, $\pi_1 = \pi_u$ et $\pi_1 \dots \pi_s = \chi_u$.

Prop.62 : $u, v \in \mathcal{L}(E)$ sont semblables $\Leftrightarrow$ ils ont les mêmes invariants de similitude.

Prop.63 : u est cyclique $\Leftrightarrow$ u admet un unique invariant de similitude. O.A

IV] Endomorphismes commutants

Lemme 64 : $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Si $u \circ v = v \circ u$, alors $\ker v$ et $\operatorname{Im} v$ sont stables par u.

1. Réduction simultanée (O.A)

Prop.65 : Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes tq $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$ $\forall i,j \in I$. Si tous les f_i sont trigonalisables (resp. diagonalisables), on peut co-trigonaliser (resp. co-diagonaliser) la famille $(f_i)_{i \in I}$.

App.66 : Soit G un sg commutatif fini de $GL_n(\mathbb{K})$, de cardinal n. Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos et si $n \wedge car(\mathbb{K}) = 1$, G est conjugué à un sg des matrices diagonales.

2. Endomorphismes normaux (E est hermitien.) (Gourdon)

Déf.67 : u est normal si u et u^* commutent.

Ex.68 : Les endomorphismes auto-adjoints, ou orthogonaux, sont normaux.

Prop.69 : Soit u normal. Si E_λ est un sous-espace propre de u, alors $E_\lambda^\perp$ est stable par u.

Th.70 : u est normal $\Leftrightarrow$ u se diagonalise dans une base orthonormale de E.
$\Leftrightarrow$ u et u^* se diagonalisent dans une base orthonormale commune.

Prop.71 : Soit E euclidien de dim 2. Soit u normal, avec $sp(u) \not\subset \mathbb{R}$. Alors dans toute base orthonormale B de E, on a $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $b \neq 0$. DEV (2)

Gourdon

Th.72 : Soit E euclidien. Soit u normal. Alors il existe une base orthonormée B de E telle que $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & \tau_1 & \\ 0 & & & & \ddots \; \tau_s \end{pmatrix}$ où $\forall i$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $\forall j$, $\tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

Ex.73 : Si u est orthogonal, $\exists B$ orthonormée tq $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} I_p & & & & 0 \\ & -I_q & & & \\ & & R_1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & R_s \end{pmatrix}$ où $R_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$

V] Applications en théorie des représentations (Berhuy)

Déf.74 : Soit (ρ, V) une représentation de G. Une sous-représentation de G est un sous-espace W stable par $\rho(g)$, $\forall g \in G$.

Déf.75 : Une représentation est irréductible si ses seules sous-représentations sont $\{0\}$ et elle-même.

Th.76 : (de Maschke.) Soit G un groupe fini, soit $\mathbb{K}$ tel que $car(\mathbb{K}) \nmid |G|$. Alors tout sous-espace G-stable (ie. stable par tous les éléments de G) admet un sous-espace supplémentaire G-stable.

Cor.77 : Toute représentation V d'un groupe fini G est somme directe d'un nombre fini de représentations irréductibles.

Références :

Objectif Agrégation
Gourdon
Berhuy
FGN 1, 2
Mansuy