154 - Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes en dimension finie. Applications.

<u>Cadre</u> : K désigne un corps, E un K-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$. On note π_u et χ_u les polynômes minimal et caractéristique de u.

I - GÉNÉRALITÉS

1- Sous-espaces stables et bases adaptées

Déf 1: Soit F un sev de E. On dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$.

Ex 2. $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par u.

Appli 3. On a $\deg(\pi_u) \leq \mathrm{rg}(u) + 1$

Prop 4. Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$ commutent, alors $\mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Im}(v)$ sont stables par u.

Appli 5. Les sous-espaces propres et caractéristiques de u sont stables par u.

Rq 6. Si $K = \mathbb{C}$, alors u admet au moins une droite stable. Si $K = \mathbb{R}$, alors u admet au moins une droite ou un plan stable.

Ex 7. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Alors u stabilise tout sev de dim k $\iff$ u est une homothétie

Ex 8. Si u est nilpotent de rang $n-1$, alors ses sev stables sont exactement les $\mathrm{Ker}(u^k)$, $k \in [\![0,n]\!]$

Ex 9. Soit $A \in M_n(K) \setminus \{0\}$. Alors les sev stables de $\left\{ \begin{array}{l} M_n(K) \to M_n(K) \\ M \mapsto \mathrm{tr}(AM) I_n \end{array} \right.$ sont ceux qui contiennent I_n ou sont inclus dans l'hyperplan $H := \{ M \in M_n(K) \mid \mathrm{tr}(AM) = 0 \}$

Ex 10. Si u est de rang 1, on a l'équivalence : F est stable par u $\iff$ $\mathrm{Im}(u) \subset F$ ou $F \subset \mathrm{Ker}(u)$

Déf / Prop 11. Soit F un sev de dim r stable par u. On définit $u_{|F} \in \mathcal{L}(F)$ (restriction) et $\bar{u} \in \mathcal{L}(E/F)$ (passage au quotient). $(E \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} E/F)$

Prop 12. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E dont les r premiers vecteurs forment une base $\mathcal{B}_F$ de F. On note $\mathcal{B}'$ le complémentaire de $\mathcal{B}_F$ dans $\mathcal{B}$. Alors la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est de la forme $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array} \right)$

De plus $\pi(\mathcal{B}')$ est une base de E/F, que l'on note $\mathcal{B}_{E/F}$. On a alors
$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u_{|F})$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{E/F}}(\bar{u})$

Enfin $\chi_u = \chi_{u_{|F}} \chi_{\bar{u}}$

Appli 13. u nilpotent $\iff$ $u_{|F}$ et $\bar{u}$ nilpotent

Appli 14. $\bar{u} = 0$ et $u_{|F} = 0$ $\not\Rightarrow$ $u = 0$ en général

Appli 15. χ_u est irréductible $\iff$ il n'existe pas de sev stable $\neq \{0\}, E$

Rq 16. Si dans les notations de la prop. 12 on a $C = 0$, on obtient une décomposition $E = F \oplus G$ en sev stables et supplémentaires.

Rq 17. Réduire un endomorphisme u revient à décomposer E en sev stables et supplémentaires sur lesquels u s'exprime de manière "simple".

Ex 18. Si p est un projecteur, alors $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$
$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$ si $\mathcal{B}$ adaptée à cette décomposition

Ex 19. Si $K = \mathbb{C}$, et u nilpotente, alors il existe une base $\mathcal{B}$ (et des indices i_j) tels que
$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} J_{i_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{i_r} \end{pmatrix}$ où $J_{i_j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in M_{i_j}(\mathbb{C})$
avec $i_1 \leq \dots \leq i_r \in \mathbb{N}^*$

2- Dualité et stabilité

Déf 20. On note $F^\perp := \{ \varphi \in E^* \mid \forall x \in F, \varphi(x) = 0 \}$
Si $B \subset E^*$, on note $B^\circ := \{ x \in E \mid \forall \varphi \in B, \varphi(x) = 0 \}$

Déf 21. L'application $\left\{ \begin{array}{l} E^* \to E^* \\ f \mapsto f \circ u \end{array} \right.$ est appelée transposée de u et notée ${}^t u$

Prop 22. F est stable par u $\iff$ $F^\perp$ est stable par ${}^t u$

Ex 23. Ici $K = \mathbb{R}$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
Posons $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{pmatrix}$ et $B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

L'endomorphisme u dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A a pour sev stables : $\{0\}$, $\mathrm{Vect}(e_1)$, $\mathrm{Vect}(e_3)$, $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$, $\mathrm{Vect}(e_3, e_4)$, $\mathrm{Vect}(e_1, e_3)$, $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$, $\mathrm{Vect}(e_1, e_3, e_4)$ et $\mathbb{R}^4$.

L'endomorphisme v dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est B a une infinité de sev stables.

3- Semi-simplicité

Déf 24. u est dit semi-simple si tout sev F stable par u admet un supplémentaire stable par u.

Ex 25. diagonalisable $\Rightarrow$ semi-simple

Ex 26. Si $K = \mathbb{C}$, diagonalisabilité et semi-simplicité coïncident.

Thm 27. u est semi-simple $\iff$ π_u est produit de facteurs irréductibles unitaires $\neq$ 2 à 2

Appli 28. Si u est nilpotent et semi-simple, alors $u=0$

Appli 29. Si u est semi-simple et F stable par u, alors $u_{|F}$ et $\bar{u}$ sont semi-simples.

Rq 30. La réciproque est fausse. Considérer $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

II - PREMIÈRES APPLICATIONS À LA RÉDUCTION

1 - Diagonalisation et trigonalisation

[RAPPEL] Thm 31 (Lemme des noyaux). Soit $P = P_1 \cdots P_k \in K[X]$, où les P_i sont 2 à 2 premiers entre eux. Alors

$$\mathrm{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(P_i(u))$$

Rq 32. Si P est un polynôme annulateur de u, comme chaque $\mathrm{Ker}(P_i(u))$ est stable par u, on déduit de ce qui précède qu'une base adaptée à cette décomposition diagonalise u.

Prop 33. u est trigonalisable $\iff$ χ_u est scindé
$\iff$ u admet un polynôme annulateur scindé

Prop 34. u est diagonalisable $\iff$ u stabilise n droites indépendantes
$\iff$ χ_u est scindé et les multiplicités des vp sont les dimensions des sous-espaces propres associés
$\iff$ u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples

Rq 35. Si K est algébriquement clos, tout endomorphisme de E est trigonalisable.

Appli 36. Si u est diagonalisable (resp., trigonalisable) et F un sev de E stable par u, alors $u_{|F}$ est diagonalisable (resp. trig.)

Ex 37. Tout endomorphisme nilpotent est trigonalisable.

Ex 38. Tout projecteur est diagonalisable.

2 - Réduction de Frobenius

Déf 39. On dit que u est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $E_x = E$, où $E_x := \{ P(u)(x) \ , P \in K[X] \}$

Déf 40. Soit $P = X^p + a_{p-1} X^{p-1} + \dots + a_0 \in K[X]$.
On appelle matrice compagnon de P la matrice $C(P) := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_{p-2} \\ & & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix}$

Prop 41. On a $\chi_{C(P)} = (-1)^p P$

Prop 42. Les affirmations suivantes sont équivalentes :
(i) u est cyclique
(ii) $(-1)^n \chi_u = \pi_u$
(iii) $\deg(\pi_u) = n$
(iv) il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = C(P)$ pour un certain $P \in K[X]$
(v) $\dim(K[u]) = n$

Thm 43. (Réduction de Frobenius) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E et des polynômes $P_r \mid P_{r-1} \mid \dots \mid P_1$ tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} C(P_1) & & \\ & \ddots & \\ & & C(P_r) \end{pmatrix}$$

De plus, ces P_i sont uniques. On les appelle les invariants de similitude de u.

Rq 44. On a $\pi_u = P_1$ et $\chi_u = \prod_{i=1}^{r} P_i$

Rq 45. Contrairement aux réductions précédentes, la réduction de Frobenius est définie sans condition sur u.

Appli 46. Les endomorphismes u et $v \in \mathcal{L}(E)$ sont semblables si et seulement s'ils ont les mêmes invariants de similitude.

Appli 47. Soit $L|K$ une extension de corps. Si $A, B \in M_n(K)$ sont semblables sur $M_n(L)$, alors elles le sont aussi sur $M_n(K)$.

Appli 48. Si le commutant de u est $K[u]$, alors u est cyclique.

Rq 49. En dimension $n \leq 3$, si $\chi_u = \chi_v$ et $\pi_u = \pi_v$, alors u et v sont semblables. Cela est faux en général si $n > 3$.
Considérer $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $(\chi = X^4 \ ; \pi = X^2)$

III - STABILITÉ ET COMMUTATION

1 - Réduction simultanée

Prop 50. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes commutant deux à deux. Si chaque u_i est diagonalisable (resp. trigonalisable), alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\forall i \in I$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_i)$ est diagonale (resp. triangulaire supérieure).

Appli 51. On a : $GL_n(K) \cong GL_m(K) \iff n = m$

Appli 52. (Théorème de Burnside) Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini. Alors G est fini.

Appli 53. Soit $U, V \in M_n(\mathbb{C})$ diagonalisables. Alors $\Phi_{U,V} : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C}),\ M \mapsto UM - MV$ est diagonalisable.

Appli 54. $\exp : H_n(\mathbb{C}) \to H_n^{++}(\mathbb{C})$ définit un homéomorphisme.
(où $H_n(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices hermitiennes, et $H_n^{++}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices hermitiennes définies positives)

Appli 55. (Décomposition de Dunford)

DEV

<u>Théorème</u> Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u soit scindé. Alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que
(i) $u = d + n$
(ii) $dn = nd$
(iii) d est diagonalisable et n est nilpotent
De plus, $d, n \in K[u]$

Appli 56. On a l'équivalence : u est diagonalisable $\Leftrightarrow$ $\exp(u)$ est diagonalisable

Appli 57. $\exp(A) = I_n \Leftrightarrow Sp(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$ (pour $A \in M_n(\mathbb{C})$)

2 - Endomorphismes normaux

Ici $K = \mathbb{C}$ sauf indication contraire.

Déf 58. u est dit normal si u et u^* commutent.

Ex 59. endomorphismes symétriques et hermitiens.

Prop 60. Si u est normal et si F est un sous-espace propre de u, alors $F^\perp$ est stable par u.

Thm 61. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.
(i) u est normal
(ii) u se diagonalise dans une base orthonormale de E
(iii) u et u^* se diagonalisent dans une base orthonormale commune

Appli 62. Intervient dans l'application 54.

Prop 63. ($K = \mathbb{R}$) Si $n = 2$ et $\mathrm{Mat}_{cano}(u) \in M_n(\mathbb{R})$. Si est normal sans vp réelle, alors dans toute base orthonormale de E, la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$

DEV

Thm 64. ($K = \mathbb{R}$) Si $\mathrm{Mat}_{cano}(u) \in M_n(\mathbb{R})$ et u normal, alors il existe une base orthonormale de E telle que la matrice de u dans cette base soit de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad \tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \ (b_j \neq 0)$$

IV - DÉCOMPOSITION DES REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES DES GROUPES FINIS

Ici $K = \mathbb{C}$, et V désigne un $\mathbb{C}$-ev. G désigne un groupe fini.

Déf 65. Soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation. S'il existe un sev $W \subset V$ stable par tout $\rho(g) \in GL(V)$ $(\forall g \in G)$, alors ρ induit une représentation $\rho : G \to GL(W)$. Une telle représentation est appelée une sous-représentation.

Déf 66. Une représentation sur un espace V est dite irréductible si elle admet exactement deux sous-représentations : $\{0\}$ et V.

Déf 67. Une représentation sur un espace V est dite indécomposable si pour tout isomorphisme de représentations $V \simeq W_1 \oplus W_2$ on a $W_1 = \{0\}$ ou $W_2 = \{0\}$.

Rq 68. Il est clair que l'irréductibilité entraîne l'indécomposabilité.

Prop 69. Soit ρ une représentation d'un groupe fini G sur un espace V. Alors ρ laisse invariant le produit hermitien suivant :
$$\langle x, y \rangle_G \overset{déf}{:=} \sum_{s \in G} \langle \rho(s)(x), \rho(s)(y) \rangle$$
où $\langle \cdot,\cdot \rangle$ est n'importe quel produit hermitien sur V.

Thm 70. Une représentation ρ sur V est irréductible si et seulement si elle est indécomposable.

Prop 71. (Théorème de Maschke) Toute représentation peut s'écrire comme somme de représentations irréductibles.

Prop 72. G est commutatif $\Leftrightarrow$ toutes les représentations irréductibles de G sont de degré 1

Appli 73. Table des caractères de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

χ_1	1	1	…	1
χ_2	1	ω_n		ω_n^{n-1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
χ_n	1	ω_n^{n-1}		$\omega_n^{(n-1)(n-1)}$

où $\omega_n := e^{\frac{2i\pi}{n}}$

Déf 74. Si $\varphi, \psi : G \to \mathbb{C}$, on pose $\langle \varphi, \psi \rangle \overset{déf}{:=} \sum_{t \in G} \varphi(t)\overline{\psi(t)}$

Rq 75. $\langle \cdot,\cdot \rangle$ définit un produit hermitien sur $\mathbb{C}[G]$.

Prop 76. Soit χ le caractère d'une représentation ρ. On a l'équivalence :
$$\rho \text{ est irréductible} \Leftrightarrow \langle \chi, \chi \rangle = 1$$

Appli 77. La représentation par permutations $\rho_p : \mathfrak{S}_4 \to GL(\mathbb{C}^4)$ induit une représentation irréductible sur $H := \{x \in \mathbb{C}^4 \mid x_1 + \dots + x_4 = 0\}$

Références

* Gourdon *Algèbre*
* *Objectif Agrégation*
* FGN Algèbre 1, 2, 3
* Mansuy (*Réduction des endomorphismes*)
* Peyré (L'Algèbre discrète de la transformée de Fourier) (pour $\boxed{IV}$)